校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

（1～3はすべての受験者が解答すること）

1

16点

（1）	a＝−5のとき，①は $x^2-4x-5\leqq 0$　となるので，左辺を因数分解すると， $(x+1)(x-5)\leqq 0$ となるので， $-1\leqq x\leqq 5$・・・(答)　　4点
（2）	a＝−6のとき，①は $x^2-4x-6\leqq 0$　となる。ここで，$x^2-4x-6=0$　を解くと， $x=2\pm\sqrt{10}$　となるので， $2-\sqrt{10}\leqq x\leqq 2+\sqrt{10}$・・・(答)　　4点
（3）	a＝4のとき，①は $x^2-4x+4\leqq 0$　となるので，左辺を因数分解すると， $(x-2)^2\leqq 0$ となるので， $x=2$・・・(答)　　4点
（4）	①の解が「解なし」となるのは，２次方程式 $x^2-4x+a=0$　の判別式をDとすると， D＜0となればよいから， $D=(-4)^2-4\times 1\times a$ $=16-4a<0$ これより，a＞4・・・(答)　　4点

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

2

16点

16点

直角三角形の直角以外の角の一つをθ（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）とすると，斜辺以外の辺は$4\sin\theta$，$4\cos\theta$と表せる。

このとき，２辺の和は　$4\sin\theta+4\cos\theta$

$$=4(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

ここで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$

となるから，$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

これより，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$　すなわち　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　$\theta=\frac{\pi}{4}$　のとき，２辺の和の長さが最大となる。

このとき，直角二等辺三角形となり，直角をはさむ２辺の長さはそれぞれ$4\sin\frac{\pi}{4}=4\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ となる。

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

3

16点

<table>
<tr><td>(1)</td><td>3ゲーム目までの勝利数がAさんが2勝でBさんが1勝であり，4ゲーム目にAさんが勝利すればよい。よって求める確率は，　$_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$ ・・・(答)　3点</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>4ゲーム目で「Aさんが勝者となる」または「Bさんが勝者となる」場合があり，
これらの事象は互いに排反である。
Aさんが試合の勝者となる確率は（1）より $\frac{2}{27}$ である。
Bさんの試合の勝者となるためには，3ゲーム目までの勝利数がBさんが2勝でAさんが1勝であり，4ゲーム目にBさんが勝利すればよい。よってその確率は
$_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$　　したがって求める確率は $\frac{2}{27}+\frac{8}{27}=\frac{10}{27}$ ・・・(答)　3点</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>Bさんのゲームの勝利数が0勝または1勝または2勝の場合があり，これらの事象は互いに排反である。Bさんの勝利数が0勝のときの確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$
Bさんの勝利数が1勝のときの確率は（1）より $\frac{2}{27}$
Bさんの勝利数が2勝のとき，4ゲームまで勝利数がAさんが2勝でBさんが2勝であり，5ゲーム目にAさんが勝利すればよい。その確率は $_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$
したがって求める確率は $\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{81}=\frac{17}{81}$ ・・・(答)　4点</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>Aさんが試合の勝者であり4ゲーム目にAさんが勝利しているとき，3ゲーム目までのBさんのゲー ムの勝利数が1勝または2勝の場合があり，これらの事象は互いに排反である。
3ゲーム目までのBさんのゲームの勝利数が1勝のとき，4ゲーム目にAさんが3勝目をあげてAさんが試合の勝者となるから，その確率は（1）より $\frac{2}{27}$
3ゲーム目までのBさんのゲームの勝利数が2勝のとき，4ゲーム目と5ゲーム目にAさんが勝利してAさんが試合の勝者となるから，その確率は
$_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$
したがってAさんが試合の勝者であり4ゲーム目にAさんが勝利している確率は
$\frac{2}{27}+\frac{4}{81}=\frac{10}{81}$　（3）よりAさんが試合の勝者となる確率は $\frac{17}{81}$ だから，求める確率は
$\dfrac{\frac{10}{81}}{\frac{17}{81}}=\frac{10}{17}$ ・・・(答)　6点</td></tr>
</table>

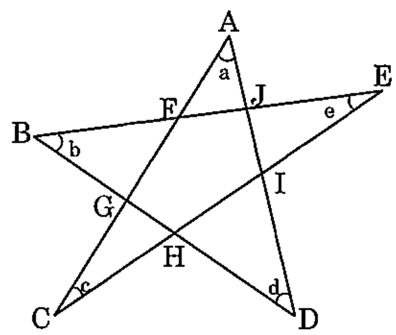
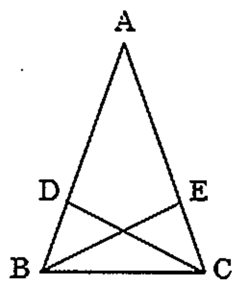
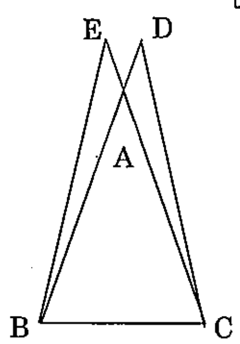
校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

4　（中学校受験者のみ解答すること）

16点

<table>
<tr><td>（1）</td><td colspan="2">5点
∠a+∠b+∠c+∠d+∠e において，
△ＡＣＩで三角形の外角の性質より
∠ＡＩＥ＝∠a+∠c・・・①
△ＢＤＪで三角形の外角の性質より
∠ＤＪＥ＝∠b+∠d・・・②
△ＥＪＩで三角形の内角の和は１８０°なので，
∠ＥＪＩ+∠ＪＩＥ+∠ＩＥＪ＝１８０°・・・③
①，②，③より，
∠ＥＪＩ+∠ＪＩＥ+∠ＩＥＪ＝（∠b+∠d）+（∠a+∠c）+∠e＝１８０°・・・④
④より，
∠a+∠b+∠c+∠d+∠e＝１８０°になり，
星形五角形の先端の５つの角の和は，１８０°になるといえる。

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（2）</td><td>①</td><td>5点
△ＡＢＥと△ＡＣＤにおいて，
AE=AD（仮定）・・・①
AB=AC（二等辺三角形ＡＢＣの定義）・・・②
∠BAE=∠CAD（共通な角）・・・③
①②③より，
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△ＡＢＥ≡△ＡＣＤ

</td></tr>
<tr><td>②</td><td>6点
△ＡＢＥと△ＡＣＤにおいて．
AE=AD（仮定）・・・①
AB=AC（二等辺三角形ＡＢＣの定義）・・・②
∠BAE=∠CAD（対頂角）・・・③
①②③より，
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△ＡＢＥ≡△ＡＣＤ

</td></tr>
</table>

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③ 中学校・高等学校　数　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

5 （中学校受験者のみ解答すること）

16点

(1) 4点

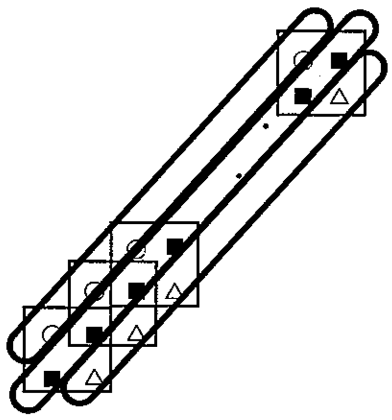
$(4\times4)+(4\times4-2\times2)\times9=16+12\times9$

$=16+108$

$=124$　　　124（cm²）

(2) 4点

図のように考えると，



○の部分は，２×２（cm²）の正方形がｎ枚あり，

△の部分も，２×２（cm²）の正方形がｎ枚ある。

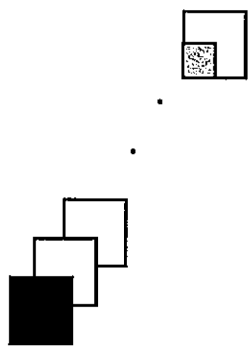
また，■の部分は，２×２（cm²）の正方形がｎ＋１枚ある。

したがって，

$(2\times2)\times n+(2\times2)\times(n+1)+(2\times2)\times n$

という式になる。

(3) 4点



$4\times4+(4\times4-2\times2)\times(n-1)$

$=16+12(n-1)$

$=16+12n-12$

$=12n+4$

面積は $12n+4$（cm²）であるといえる。

(4) 4点

【解答例】

・ｎ枚重ねたときの＿周の長さ＿は，ｎを使った式で＿８ｎ＋８＿と表される。

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

6　**（中学校受験者のみ解答すること）**

20点

（1）	①	数理的	②	表現・処理	③	論理的
	④	よさ	⑤	多面的	2点×5＝$\boxed{10点}$	
（2）	①	表1より，中央値は24.5cmであるので，生徒Aの靴のサイズは，過去10年分のデータと比較して大きい方であるといえる。 $\boxed{3点}$				
	②	・グラフを見ると最も度数が大きいのは24.0cmで397足であることから，最頻値が24.0cmであり，24.0cmの靴を最も多く準備すればよい。 $\boxed{3点}$ （代表値としては平均値ではなく，最頻値を根拠として考えを進めなければならない。代表値を根拠として扱っていく場合には，根拠としてふさわしい代表値を選択して説明しなければならない。） （代表値だけではなく，データの分布の形と合わせて判断しなければならない。）				
	③	・A地点からB地点までのバスの乗車時間。 $\boxed{4点}$ その理由は，雨の日は晴れの日に比べ自動車を利用する人が多く，渋滞することが考えられ，雨の日は晴れの日に比べ乗車時間が長くなり，雨の日のバスの乗車時間と晴れの日のバスの乗車時間には差があると考えられるから。				

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{7}$　（高等学校受験者のみ解答すること）

16点

（1）

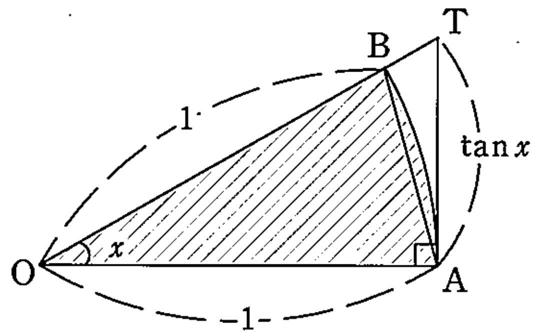
[1]　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$　のとき　$\boxed{8点}$

右の図のように，半径が 1，中心角が x ラジアンの扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について

$\triangle$OAB＜扇形 OAB ＜$\triangle$OAT

が成り立つ。よって

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$



すなわち　$\sin x<x<\tan x$　が成り立つ。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$　より　$\sin x>0$　だから　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

よって，$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$　…①　が成り立つ。

[2]　$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$　のとき

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$　より　$0<-x<-\dfrac{\pi}{2}$　だから①より

$\cos(-x)<\dfrac{\sin(-x)}{-x}<1$　すなわち　$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$　が成り立つ。

[1]，[2]より　$x=0$　の近くで　$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$　が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}1=1$　だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

が成り立つ。

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

7　（高等学校受験者のみ解答すること）

(2)	①	$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$ $$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$ $$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$ $$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$ $$=\frac{1}{2}$$ 4点
	②	$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$$ $$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$ $$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$ $$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$ $$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$ $$=\frac{2}{3}$$ 4点

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　数　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

8　（高等学校受験者のみ解答すること）

16 点

（1）　5点

$f(\chi)=xe^{-x}$ より，$\chi>0$ のとき

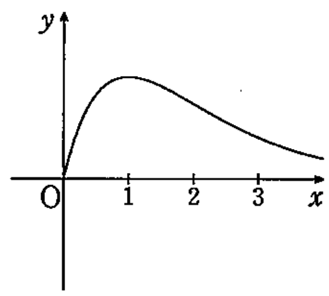
$f'(\chi)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-\chi)e^{-x}$

$f''(\chi)=-e^{-x}-(1-\chi)e^{-x}$

$=(\chi-2)e^{-x}$

よって，増減，凹凸は次のようになる。

χ	0	…	1	…	2	…
$f'(\chi)$		＋	0	−	−	−
$f''(\chi)$		−	−	−	0	＋
$f(\chi)$	0	↱	$\frac{1}{e}$	↴	$\frac{2}{e^2}$	↳



よって，曲線Cの概形は右図のようになる。

また，極大値は $\frac{1}{e}$ （$\chi=1$），極小値はなし，変曲点は $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$

（2）　4点

$f'(2)=-\frac{1}{e^2}$ より，法線mの傾きは e^2 となる。

C上の変曲点 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$ における法線mの方程式は，

$y-\frac{2}{e^2}=e^2(\chi-2)$

よって，$y=e^2x+2\left(\frac{1}{e^2}-e^2\right)$・・・(答)

（3）　7点

$2\leqq\chi\leqq e$ の範囲ではmはCの上側にあるから，

$$S=\int_2^e\left[e^2x+2\left\{\frac{1}{e^2}-e^2\right\}-xe^{-x}\right]dx$$

$$=\left[\frac{e^2}{2}x^2+2\left(\frac{1}{e^2}-e^2\right)x-\{x(-e^{-x})-e^{-x}\}\right]_2^e$$

$$=\frac{e^4}{2}+2\left(\frac{1}{e}-e^3\right)+\frac{1}{e^e}(e+1)-\left\{2e^2+4\left(\frac{1}{e^2}-e^2\right)+\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}\right\}$$

$$=\frac{e^4}{2}-2e^3+2e^2+\frac{2}{e}-\frac{7}{e^2}+\frac{1}{e^e}(e+1)$$ ・・・(答)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

③　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

9　（高等学校受験者のみ解答すること）

20点

（１）	①	見方・考え方	②	体系的	③	表現・処理
	④	統合的	⑤	数学的論拠	２点×５＝１０点	

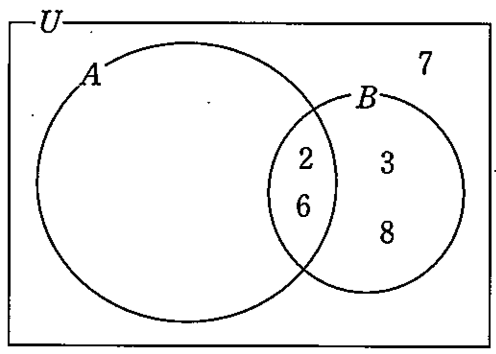
（２）　１０点

【問題例】

全体集合 $U=\{x \mid x$ は 10 より小さい正の整数$\}$ の部分集合 A，B について，
$A\cap B=\{2,\ 6\}$，$\overline{A}\cap B=\{3,\ 8\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{7\}$ であるとき，A，B を求めよ。

【解答例】

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
である。ベン図より



$A\cap\overline{B}=\{1,\ 4,\ 5,\ 9\}$

だから，
$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9\}$
$B=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$