

(全9枚中の1枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(1) ～ (3) はすべての受験者が解答すること)

※何も記入
しないこと

1	(1) $\frac{2}{a-\sqrt{5}}$ の整数部分は 2 であるから, $2 \leq \frac{2}{a-\sqrt{5}} < 3$ $\frac{1}{3} < \frac{a-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{1}{2}$ より, $\frac{2}{3} + \sqrt{5} < a \leq 1 + \sqrt{5}$ $2 < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$ より, $a = 3$ よって, $\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 求める小数部分は, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	4
	(2) $\angle BAC = \theta$ とすると, $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから, $\angle ABD = \theta$ である。 よって, $\angle BDC = \angle BAD + \angle ABD = 2\theta$ $\triangle BCD$ は直角二等辺三角形であるから, $\angle BDC = 45^\circ$ よって, $2\theta = 45^\circ$ より, $\theta = 22.5^\circ$ $BD = \sqrt{2}$ であるから, $AD = \sqrt{2}$ $AC = AD + CD = \sqrt{2} + 1$ よって, $\tan 22.5^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$	4
	仮説 H_1: 太郎さんは花子さんより強い に対し, それに反する次の仮説 H_0 を立てて考察する。 仮説 H_0: 太郎さんと花子さんの強さは同等である 仮説 H_0 のもとで, ゲームを 10 回行って, 太郎さんが 8 回以上勝つ確率は ${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + {}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $= \frac{1}{2^{10}}(1 + 10 + 45) = \frac{56}{1024} = 0.054 \cdots$ これは 0.05 より大きいから, 仮説 H_0 は否定できず, 仮説 H_1 が正しいとは判断できない。 したがって, 太郎さんは花子さんより強いとは判断できない。	4
	(4) $f(x) = (x-1)^2 + 1$ $g(x) = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + a$ 題意の条件は, $[f(x) \text{ の最小値}] \geq [g(x) \text{ の最大値}]$ が成り立つことと同じである。 よって, $1 \geq \frac{a^2}{4} + a$ が成り立てばよいから, $a^2 + 4a - 4 \leq 0$ これを解くと, $-2 - 2\sqrt{2} \leq a \leq -2 + 2\sqrt{2}$	4

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

※何も記入
しないこと

2	(1)	取り出した白玉の数を X とすると、 X のとりうる値は $X=0, 1, 2$ 白玉を1個取り出す確率は $\frac{{}_5C_1 \cdot {}_n C_1}{{}_{n+5}C_2} = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$ 白玉を2個取り出す確率は $\frac{{}_5C_2}{{}_{n+5}C_2} = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$ よって、 X の期待値は $1 \cdot \frac{10n}{(n+5)(n+4)} + 2 \cdot \frac{20}{(n+5)(n+4)} = \frac{10(n+4)}{(n+5)(n+4)} = \frac{10}{n+5}$ これが $0.625 = \frac{5}{8}$ と等しくなるとき $\frac{10}{n+5} = \frac{5}{8}$ よって $2 \cdot 8 = n+5$ したがって $n=11$	4
(2)	①	台形ABCDの4つの辺の長さの比は、 $AB:BC:CD:DA=1:2\sqrt{2}:3:2$ であるから、4つの点P, Q, R, Sの移動する速さの比もこれに等しい。 また、点Pは毎秒1の速さで移動するから、Qは毎秒 $2\sqrt{2}$, Rは毎秒3, Sは毎秒2の速さでそれぞれ移動する。 よって、各点が移動を開始して2秒後は、 $CQ=BC-BQ=6\sqrt{2}-2 \cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, $CR=3 \cdot 2=6$ $\angle QCR=45^\circ$ であるから、 $\triangle CRQ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6 \sin 45^\circ = 6$	4
	②	各点が移動を開始してから t ($0 \leq t \leq 3$) 秒後について、4つの点の速さより、 $AP=t$, $BP=3-t$, $BQ=2\sqrt{2}t$, $CQ=2\sqrt{2}(3-t)$ $CR=3t$, $DR=3(3-t)$, $DS=2t$, $AS=2(3-t)$ また、 $\angle ABC=180^\circ-\angle BCD=135^\circ$ であるから、 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2(3-t) = t(3-t)$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}t \cdot (3-t) \sin 135^\circ = t(3-t)$ よって、 $S_1=S_2$ が成り立つ。同様にして、 $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3t \cdot 2\sqrt{2}(3-t) \sin 45^\circ = 3t(3-t)$, $S_4 = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot 3(3-t) = 3t(3-t)$ よって、 $S_3=S_4$ が成り立つ。	4
	③	台形ABCDの面積を S とすると、 $S = \frac{1}{2} \cdot (3+9) \cdot 6 = 36$ 四角形PQRSの面積が $\frac{2}{3}S$ より、 $S_1+S_2+S_3+S_4 = \frac{1}{3}S = 12$ ②より、 $3S_1=3S_2=S_3=S_4$ が成り立つから、 $S_1+S_1+3S_1+3S_1=12$ $2S_1=3$ に $S_1=t(3-t)$ を代入して、 $2t(3-t)=3$ $2t^2-6t+3=0$ $t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ これはどちらも $0 \leq t \leq 3$ を満たすので $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ 秒後である。	4

(全9枚中の3枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

※何も記入
しないこと

3

	①	90°	②	エ	③	カ	2	3	3
(1)	④	直線ABが円Kの点Aにおける接線であるから、方べきの定理より、 $BD \cdot BE = BA^2 \dots\dots ①$ $BD:DC = c:b$ より、 $BD = \frac{c}{c+b}BC = \frac{ca}{c+b} \dots\dots ②$ $BE:EC = c:b$ より、 $BE = \frac{c}{c-b}BC = \frac{ca}{c-b} \dots\dots ③$ ②、③を①に代入して、 $\frac{ca}{c+b} \cdot \frac{ca}{c-b} = c^2$ $c^2a^2 = c^2(c^2 - b^2)$ $c \neq 0$ より、 $a^2 = c^2 - b^2$ よって、 a, b, c の満たす条件は $a^2 + b^2 = c^2$ である。						4	
(2)	CGは∠ACBの外角の二等分線であるから、 $BG:GA = a:b$ よって、 $BA:AG = (a-b):b$ AEは∠BACの外角の二等分線であるから、 $BE:EC = c:b$ △GBCと直線AEについて、メネラウスの定理より、 $\frac{GM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BA}{AG} = 1$ $\frac{GM}{MC} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a-b}{b} = 1$ より、 $\frac{GM}{MC} = \frac{c}{a-b}$ であるから、 $GM:MC = c:(a-b) \dots\dots ①$ 一方、 $BG = \frac{a}{a-b}AB = \frac{ca}{a-b}$ であり、BPは∠GBCの二等分線であるから、 $GP:PC = BG:BC = \frac{ca}{a-b}:a = c:(a-b) \dots\dots ②$ ①、②より、点Pと点Mはどのような場合でも一致するから、3点B, I, Mは一直線上にある。							4	

(全9枚中の4枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

※何も記入
しないこと

(中学校受験者のみ解答すること)

4	(1)	$\begin{aligned} & 3.14 \times 7.56 + 2.44 \times 2.23 + 0.91 \times 2.44 \\ &= 3.14 \times 7.56 + (2.44 \times 2.23 + 2.44 \times 0.91) \\ &= 3.14 \times 7.56 + 2.44 \times (2.23 + 0.91) \\ &= 3.14 \times 7.56 + 2.44 \times 3.14 \\ &= 3.14 \times (7.56 + 2.44) \\ &= 3.14 \times 10 = 31.4 \end{aligned}$	4
	(2)	$7^1=7, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401, 7^5=16807$ 一の位の数 は, $7 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \cdots$ と繰り返す。 1, 5, 9, $\cdots$ 番目、つまり指数が4で割ると1余る数の場合は一の位の数 は7 2, 6, 10, $\cdots$ 番目、つまり指数が4で割ると2余る数の場合は一の位の数 は9 同様に4で割ると3余る数の場合は一の位の数 は3, また4の倍数の場合は一の位の数 は1 $2026 \div 4 = 506$ 余り2となるので, 7^{2026} の一の位の数 は9	4
	(3)	家から峠までの道のりを x km, 峠から祖母の家までの道のりを y km とおくと, $\begin{cases} x+y=9.3 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=2.1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+4y=37.2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \times 4 \\ 5x+4y=42 & \cdots \cdots \textcircled{2} \times 20 \end{cases}$ これより, $x=4.8, y=4.5$ 太郎さんの家から峠までの道のりは 4.8 km, 峠から祖母の家までの道のりは 4.5 km	4
	①	$\triangle CEF$ を底面とすると高さは辺 AB となるから, 求める三角すいの体積は, $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times 8 = \frac{64}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$	3
	(4) ②	三平方の定理より, $AE=AF=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$, $EF=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ になるので, $\triangle AEF$ は二等辺三角形である。 点 A から辺 EF に垂線を引き, その交点を M とおくと, 点 M は辺 EF の中点になる。 $\triangle AEF$ の面積を S とすると, $AM=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ より, $S=\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}=24$ 求める高さを h とすると, $\frac{1}{3}Sh=\frac{64}{3} \text{ より, } \frac{8}{3}$ よって, $\triangle AEF$ を底面としたときの高さは $\frac{8}{3}$ cm	4

(全9枚中の5枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(中学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

5	(1)	どちらの数も正の数であるから、2乗して大小関係を比べる。 $(\sqrt{3}+3)^2=12+6\sqrt{3}$, $(\sqrt{23})^2=23$ $(12+6\sqrt{3})-23=6\sqrt{3}-11=\sqrt{108}-\sqrt{121}<0$ よって、 $12+6\sqrt{3}<23$ それぞれの数の正の平方根の大小関係は変わらないので、 $\sqrt{3}+3<\sqrt{23}$	4
	(2)	点Aの座標は $(-6, 36a)$ 、点Bの座標は $(4, 16a)$ となる。 直線ABの傾きは、 $\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}} = \frac{16a-36a}{4-(-6)} = \frac{-20a}{10} = -2a$ 直線ABの傾きは $-\frac{1}{2}$ より、 $-2a = -\frac{1}{2}$ よって、 $a = \frac{1}{4}$	4
	(3)	$S=(x+2y)^2-x^2=4xy+4y^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ $\ell=\left(x+\frac{y}{2} \times 2\right) \times 4=4x+4y \cdots \cdots \textcircled{2}$ ②の両辺を y 倍すると、 $y\ell=4xy+4y^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$ ①と③の右辺が等しいから、 $S=y\ell$ が成り立つ。	4
	(4)	ア どちらも赤玉の確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$ イ どちらも白玉の確率 $\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{4}{36}$ ウ どちらも黒玉の確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{9}{36}$ エ 赤玉1個と白玉1個の確率は、左の袋から赤玉をとる場合と、右の袋から赤玉をとる場合がある ので、 $\left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}\right) \times 2=\frac{4}{36}$ オ 白玉1個と黒玉1個の確率はエと同様にして考えると、 $\left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{6}\right) \times 2=\frac{12}{36}$ カ 赤玉1個と黒玉1個の確率はエと同様にして考えると、 $\left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{6}\right) \times 2=\frac{6}{36}$ よって、オ(白玉1個と黒玉1個)が最も起こりやすい。	4

(全9枚中の6枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(中学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

6

(1)	①	数学化	②	母集団	③	批判的
	④	数学のよさ	⑤	多様な考え		
(2)	①	相似比は1：3だから， 表面積の比は $1^2：3^2=1：9$ 体積の比は $1^3：3^3=1：27$ となる。 表面積は9倍になるので，塗料は $5\times9=45$ （mL） 体積は27倍になるので，樹脂は $40\times27=1080$ （g）必要である。				
	②	置物Rを作った後の置物Pの材料と余った材料の分量の比は， 塗料が $9-4=5 \rightarrow 1：5$ 樹脂が $27-8=19 \rightarrow 1：19$ 余った塗料すべてを使った場合を考えると，塗料の分量の比（表面積の比）は1：5だから， 相似比は $1：\sqrt{5}$ （ $\approx 2.236\cdots$ ） この相似比から，必要な樹脂の分量の比（体積の比）を考えると， $1^3：(\sqrt{5})^3=1：5\sqrt{5}$ （ $\approx 11.180\cdots$ ） $19>5\sqrt{5}$ だから，余った塗料をすべて使う大きさの置物を作っても，樹脂が余る。 よって，置物Sの高さは，最大で置物Pの $\sqrt{5}$ 倍になる。				

2	2	2
2	2	

3

4

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(高等学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

7	(1) 与えられた等式を変形すると、$-3\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$ $6\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\text{より、}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ ここで、直線APと線分BCの交点をDとすると、 $\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\text{となるので、}BD:DC=1:2\text{である。}$ $\triangle ABC$の面積をSとすると、 $\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot\triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC=\frac{1}{6}S$ $\triangle PBC=\frac{1}{2}\cdot\triangle ABC=\frac{1}{2}S$ $\triangle PCA=\frac{1}{2}\cdot\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\triangle ABC=\frac{1}{3}S$ ゆえに、$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=\frac{1}{2}S:\frac{1}{3}S:\frac{1}{6}S=3:2:1$	5
	(2) $\log_{10}18^{50}=50\times\log_{10}18=50(\log_{10}2+2\log_{10}3)=62.76$ よって、$18^{50}=10^{62.76}$ ゆえに $10^{62}<18^{50}<10^{63}$ したがって、18^{50} は 63 桁の整数である。 $\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.699$ $\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781\text{であるから、}$ $10^{62}\times10^{0.699}<10^{62}\times10^{0.76}<10^{62}\times10^{0.7781}$ よって、$5\times10^{62}<18^{50}<6\times10^{62}$ したがって、18^{50} の最高位の数字は5である。	5
	(3) $y=-x^2+x\text{から、}y'=-2x+1$ $\ell_1\text{の方程式は、}y-0=(-2\cdot0+1)(x-0)\text{から、}y=x$ $\ell_2\text{の方程式は、}y+2=(-2\cdot2+1)(x-2)\text{から、}y=-3x+4$ $\ell_1\text{と}\ell_2\text{の交点の}x\text{座標は、}x=-3x+4\text{から、}x=1$ よって、求める面積Sは $S=\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2\{(-3x+4)-(-x^2+x)\}dx$ $=\int_0^1x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx$ $=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	5

(全9枚中の8枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(高等学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

8	(1)	与えられた方程式の両辺を2乗すると, $ z-3 ^2=4 z ^2 \quad (z-3)(\overline{z-3})=4z\overline{z}$ ゆえに, $(z-3)(\overline{z}-3)=4z\overline{z}$ 展開して整理すると, $z\overline{z}+z+\overline{z}-3=0$ よって, $(z+1)(\overline{z}+1)=2^2$ すなわち, $ z+1 ^2=2^2$ ゆえに, $ z+1 =2$ したがって, 求める図形は点 -1 を中心とする半径2の円である。	4
(2)	①	$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ $= \left[-\log(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$ $= -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2 \quad = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$	4
	②	$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot (\tan x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ $= \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$ したがって求める関係式は, $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$	4
	③	②より $\frac{I_{n+2}+I_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$ となるので, $\sum_{k=1}^n \frac{I_{k+2}+I_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ $= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ $= 1 - \frac{1}{n+1}$ したがって求める極限值は, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$	4

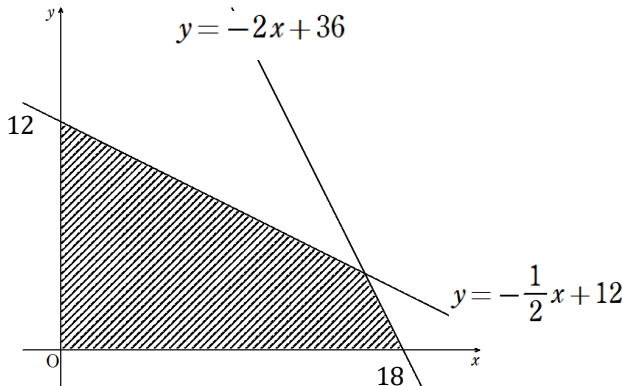
校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑨ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(高等学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

9	(1)	①	資質・能力	②	数学化	③	数学的な表現	2	2	2
		④	数学のよさ	⑤	数学的論拠				2	2
	(2)	【正しい解答】 予算の条件より、 $2000x + 1000y \leq 36000$ $2x + y \leq 36$ よって、条件を満たす不等式は、 $\begin{cases} 2x + y \leq 36 \\ x + 2y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$  となるから、条件を満たす不等式を表す領域は図の斜線部分。 (ただし、境界線を含む。) 求めた連立不等式の表す領域をDとすると、領域Dは4点(0, 0), (18, 0), (16, 4), (0, 12)を頂点とする四角形の周および内部である。 $25000x + 15000y = k \dots\dots (*)$ とおくと、これは傾きが $-\frac{5}{3}$, y切片が $\frac{k}{15000}$ の直線を表す。 この直線(*)が領域Dと共有点をもつような k の値の最大値を求めればよい。 図の2直線の傾き -2, $-\frac{1}{2}$ に対して、$-2 < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{2}$ であるから、 領域Dにおいては、直線(*)が点(16, 4)を通るとき k の値は最大になる。 よって、総カロリーが最大となるのは、非常食Aを16箱、非常食Bを4箱購入する場合である。								
		【指導上の留意点】 (例) 生徒の解答は、非常食の1箱当たりのカロリーの条件と予算の条件しか考えていないため、保管スペースの条件にも着目させるように留意する。						7		
								2		
						2				
						21				