

(全9枚中の1枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

(1 ～ 3 はすべての受験者が解答すること)

※何も記入
しないこと

1

(1)	右の式から $x = \frac{39}{9} = \frac{13}{3}$ $\frac{1}{x} = \frac{3}{13} = 0.230769230769\cdots = 0.\dot{2}3076\dot{9}$ $\frac{1}{x}$ の小数第1位以下は6つの数字の配列230769が繰り返される。 $100 = 6 \times 16 + 4$ であるから、小数第100位の数字は、配列230769の左から4番目の数字である。 よって、小数第100位の数字は 7	$\begin{array}{r} 10x = 43.33\cdots \\ -) \quad x = 4.33\cdots \\ \hline 9x = 39 \end{array}$	4
(2)	$\begin{aligned} Z &= a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a + 6b \\ &= a^2 - 2(b+1)a + 2b^2 + 6b \\ &= \{a - (b+1)\}^2 + b^2 + 4b - 1 \\ &= \{a - (b+1)\}^2 + (b+2)^2 - 5 \end{aligned}$ よって、Z は $a - b - 1 = 0$, $b + 2 = 0$ のとき、すなわち $a = -1$, $b = -2$ のとき最小となり、その値は -5		4
(3)	$A \cup B = \{-4, -1, 2, 4, 5, 9, 10\}$ であり、要素が整数であるから、 $a^2 = 4$ …… ① または $a^2 = 9$ …… ② また、$10 \in B$ であるから、 $a - 1 = 10$ …… ③ または $a + b = 10$ …… ④ ①, ②から $a = \pm 2, \pm 3$ これらは③を満たさない。 よって $a - 1 = -4$ かつ $a + b = 10$ $a = -3$, $b = 13$ このとき、$A = \{-1, 2, 5, 9\}$, $B = \{-4, -1, 4, 9, 10\}$ であるから、条件に適する。 よって、$A \cap B = \{-1, 9\}$		4
(4)	$2x - 4 \leq x + k$ …… ① とする。 (i) $x \geq 2$ のとき ① は $2x - 4 \leq x + k$ これを解いて $x \leq k + 4$ (ii) $x < 2$ のとき ① は $-(2x - 4) \leq x + k$ これを解いて $x \geq \frac{4 - k}{3}$ (i), (ii) から、不等式①を満たす実数 x が存在するための必要十分条件は、 $\frac{4 - k}{3} \leq k + 4$ これを解いて $k \geq -2$		4

(全9枚中の2枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

2

※何も記入
しないこと

(1)	条件より、 $AF=BD=CE$ ①より、 $\angle RAF=\angle PBD=\angle QCE$, $\angle AFR=\angle BDP=\angle CEQ$ よって、 $\triangle AFR$, $\triangle BDP$, $\triangle CEQ$ は1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle AFR \equiv \triangle BDP \equiv \triangle CEQ$ よって、 $AR=BP=CQ$, $FR=DP=EQ$ ①より、 $AD=BE=CF$ よって、 $PR=PQ=QR$ より、 $\triangle PQR$ は正三角形である。	4
(2)	出た目の最小値が2であるという事象をA、最大値が5であるという事象をBとする。 Aは、出た目がすべて2以上であるという事象から、すべて3以上であるという事象を除いたものであるから、 $P(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{125-64}{216}=\frac{61}{216}$ また、最小値が2、最大値が5となる目の組合せは、 $\{2, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 5\}$ よって、 $P(A \cap B)=\frac{2 \times {}_3C_1 + 2 \times 3!}{6^3}=\frac{18}{216}$ したがって、求める確率は $P_A(B)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{18}{216} \div \frac{61}{216}=\frac{18}{61}$	4
(3)	$(1-\cos \theta)x^2+4(\sin^2 \theta)x+(1+\cos \theta)=0$ …… ①とする。 ①の判別式をDとすると、①がただ1つの解をもつための条件は $D=0$ である。 $\frac{D}{4}=\{2(\sin^2 \theta)\}^2-(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)=4\sin^4 \theta-\sin^2 \theta$ $=\sin^2 \theta(2\sin \theta+1)(2\sin \theta-1)$ $D=0$ とすると $\sin^2 \theta(2\sin \theta+1)(2\sin \theta-1)=0$ $0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $\sin \theta \neq 0$, $2\sin \theta+1 \neq 0$ よって、 $2\sin \theta-1=0$ すなわち $\sin \theta=\frac{1}{2}$ これを解くと $\theta=30^\circ$ このとき、方程式①の解は $x=-\frac{4\sin^2 \theta}{2(1-\cos \theta)}=-\frac{2(1-\cos^2 \theta)}{1-\cos \theta}=-2(1+\cos \theta)$ $=-2(1+\cos 30^\circ)=-2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2-\sqrt{3}$	4
(4)	平均が13であるから、 $\frac{18+10+19+9+a+b}{6}=13$ よって、 $a+b=22$ 分散が21であるから、 $\frac{18^2+10^2+19^2+9^2+a^2+b^2}{6}-13^2=21$ よって、 $a^2+b^2=274$ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より、 $ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{22^2-274}{2}=105$ したがって、 a と b は2次方程式 $x^2-22x+105=0$ の2つの解である。 $x^2-22x+105=0$ より、 $(x-7)(x-15)=0$ であるから、 $x=7, 15$ $a<b$ であるから、 $a=7$	4

(全9枚中の3枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

3

※何も記入
しないこと

(1)	$(c+a)x-ca$	(2)	$ab+bc-ca$
(3)	$(a-b)(b-c)$	(4)	$\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$
(5)	$-\frac{3}{2}b^2-\frac{3}{2}b+3$	(6)	-2
(7)	$-\frac{1}{2}$	(8)	1
(9)	$\frac{27}{8}$		

1 1

2 2

2 2

2 2

2

16

(全9枚中の4枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

4 (中学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

(1)	$x = 4 + \sqrt{10}$ を代入して, $\sqrt{x^2 - 6x + 5}$ $= \sqrt{(4 + \sqrt{10})^2 - 6(4 + \sqrt{10}) + 5}$ $= \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ $= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}$ $= \sqrt{5} + \sqrt{2}$
(2)	両辺を100倍して, $(2x - 6)(5x + 30) = 100$ $10x^2 + 30x - 280 = 0$ 両辺を10でわって, $x^2 + 3x - 28 = 0$ $(x - 4)(x + 7) = 0$ よって, $x = 4, -7$
(3)	移したみかんの個数を x 個とすると, (移動後のAのかごのみかんの総数) : (移動後のBのかごのみかんの総数) = 3 : 4 より, $(28 - x) : (28 + x) = 3 : 4$ よって, $4(28 - x) = 3(28 + x)$ $-7x = -28$ $x = 4$ 移したみかんの個数は4個
(4)	① 三平方の定理を利用して, $MN = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ 四角形BMNDは長方形で, $BM = 3$, $MN = 6\sqrt{2}$ より, $BN = \sqrt{3^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 72} = \sqrt{81} = 9$ よって, $BN = 9(\text{cm})$
	② $AM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 同様にMG, GN, NAの長さも $3\sqrt{5}$ となるため, 四角形AMGNはひし形である。 対角線AGは立方体の対角線の長さより, $AG = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}$ ひし形の面積は (対角線AG) $\times$ (対角線MN) $\div 2$ より, $6\sqrt{3} \times 6\sqrt{2} \div 2 = 18\sqrt{6}$ よって, 求める四角形の面積は $18\sqrt{6} \text{ cm}^2$

3

3

3

3

4

16

(全9枚中の5枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

5 (中学校受験者のみ解答すること)

※何も記入

しないこと

	記号	ウ	
(1)	理由	①の直方体が，3つの直方体の中で1番底面積が大きい。 よって，毎分同じ量の水を入れた時に水の深さの変化の仕方が小さくなり，グラフの傾きが小さくなるから。	
(2)		3の倍数になるためには，各位の和が3の倍数になればよいので， (0，1，2)，(0，2，4)，(1，2，3)，(2，3，4) のいずれかの組合せになればよい。 (i) (0，1，2)，(0，2，4)の場合 百の位が0以外の数になるので， $2 \times 2 \times 1 = 4$ (通り) (ii) (1，2，3)，(2，3，4)の場合 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り) よって， $4 \times 2 + 6 \times 2 = 20$ (通り)	
(3)		高さを h とすると，三平方の定理より， $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$ $h^2 = \frac{3}{4}a^2$ ， $h > 0$ であるから， $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ よって，正三角形の面積は， $S = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	
(4)	①	Aの位置の数を x とすると， $B = x + 1$ ， $C = x + 2$ ， $D = x + 3$ ， $E = x + 4$ である。 $B + C + D + E = 634$ より， $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 634$ $4x = 624$ よって， $x = 156$	
	②	n 番目，18番目のAの位置の数は，それぞれ $5n - 4$ ，86である。 これより， $(5n - 4) + 2 = 3 \times (86 + 3) + 1$ $5n = 270$ よって， $n = 54$	

(全9枚中の6枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

6 (中学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

(1)	①	見方・考え方	②	技能	③	活用
	④	生活	⑤	過程		
(2)	【予想される生徒の誤答例】 図2の六角形を，正六角形と考えて計算する以下のような誤答が考えられる。 六角形の辺の長さが2 c mより，円の半径は六角形の辺の長さの半分だから，1 c mになる。 $A=1\times 1\times \pi\times \frac{120}{360}\times 6=2\pi$ $B=1\times 1\times \pi\times \frac{240}{360}\times 6=4\pi$ これより， $B-A=4\pi-2\pi=2\pi$ (cm ²)					
	①	この他，適切な誤答例を記述しているものを正解とする。				
	【指導上の留意点】 与えられた図形は正六角形ではないことを確認させた上で，おうぎ形の面積を，それぞれのおうぎ形の中心角が分からなくても，n角形の内角の和が $180^{\circ}\times (n-2)$ であることを活用して求めることができることに気付かせるように指導することにより，生徒が間違っただ点を理解させることに留意する。					
	この他，適切な指導上の留意点を記述しているものを正解とする。					
	②	n角形の辺の長さを2 rとおくと，円の半径はr となる。 $A=r\times r\times \pi\times \frac{180\times (n-2)}{360}$ $B=r\times r\times \pi\times \frac{360\times n-180\times (n-2)}{360}$ これより， $B-A=r\times r\times \pi\times \frac{360\times n-180\times (n-2)}{360}-r\times r\times \pi\times \frac{180\times (n-2)}{360}$ $=r\times r\times \pi\times \frac{360\times n-180\times (n-2)-180\times (n-2)}{360}$ $=r\times r\times \pi\times \frac{360+360}{360}$ $=(r\times r\times \pi)\times 2$ $=2\pi r^2$ よって，B-Aは，n角形の辺の長さの半分の半径とする円2つ分の面積になる。				

2	2	2
2	2	

3

3

3

19

(全9枚中の7枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

7 (高等学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

(1)	$a_1 = \frac{1}{5}$ と漸化式より、すべての n について $a_n \neq 0$ である。 よって、与えられた漸化式の両辺の逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + 3$ と変形できる。 さらにこれを $\frac{1}{a_{n+1}} + 3 = 2\left(\frac{1}{a_n} + 3\right)$ と変形すると、$\left\{\frac{1}{a_n} + 3\right\}$ は、 初項 $\frac{1}{\frac{1}{5}} + 3 = 8$、公比 2 の等比数列であるから、$\frac{1}{a_n} + 3 = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$ ゆえに、$\frac{1}{a_n} = 2^{n+2} - 3$ したがって、$a_n = \frac{1}{2^{n+2} - 3}$	4
(2)	$\int_1^x f(t)dt = -3x^2 + ax - 1 \dots\dots ①$ とする。 ① の両辺を x で微分すると、$\frac{d}{dx} \int_1^x f(t)dt = f(x)$ より、$f(x) = -6x + a \dots\dots ②$ ① に $x = 1$ を代入すると、$\int_1^1 f(t)dt = 0$ より、$0 = -3 + a - 1$ よって、$a = 4$ ② に代入すると、$f(x) = -6x + 4$	4
(3)	$x - x^{-1} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ $= \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)$ $= 3^3 + 3 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ また、$x^2 + x^{-2} = (x - x^{-1})^2 + 2x \cdot x^{-1}$ $= 36^2 + 2 \cdot 1 = 1298$	4
(4)	$\left(a + \frac{3}{b}\right)\left(b + \frac{2}{a}\right) = 5 + ab + \frac{6}{ab}$ $a > 0, b > 0$ より、$ab > 0, \frac{6}{ab} > 0$ であるから、(相加平均) $\geq$ (相乗平均) により、 $ab + \frac{6}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{6}{ab}} = 2\sqrt{6}$ よって、$5 + ab + \frac{6}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{6}$ 等号が成り立つのは、$ab = \frac{6}{ab}$ のときである。 このとき、$(ab)^2 = 6$ $a > 0, b > 0$ であるから、$ab = \sqrt{6}$ したがって、$ab = \sqrt{6}$ のとき最小値 $5 + 2\sqrt{6}$	4

(全9枚中の8枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

8 (高等学校受験者のみ解答すること)

※何も記入
しないこと

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 0$$

また、 $x = -t$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^t \left(-1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} \right) = -\infty$$

(2)

方程式を変形すると、 $f(x) = a$ となる。

ここで、 $f'(x) = -(2x+2)e^{-x} + (x^2+2x-2)e^{-x}$
 $= (x+2)(x-2)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ とすると、 $x = -2, 2$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $2e^2$	↘	極小 $-\frac{6}{e^2}$	↗

(1)より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ より、
 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が、方程式の異なる実数解の個数と一致するから、

$a > 2e^2$ のとき 0 個

$a < -\frac{6}{e^2}$, $a = 2e^2$ のとき 1 個

$a = -\frac{6}{e^2}$, $0 \leq a < 2e^2$ のとき 2 個

$-\frac{6}{e^2} < a < 0$ のとき 3 個

4

12

16

(全9枚中の9枚目)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	
----	-----------	------	--

⑧ 中学校・高等学校 数 学 解答例

(解答にあたっては、計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと)

9 (高等学校受験者のみ解答すること)

※何も記入

しないこと

(1)	①	見方・考え方	②	微分・積分	③	技能
	④	過程	⑤	活用		

(2)	①	$f'(2)=0$ であっても $x=2$ で極値をとるとは限らないため、逆を調べる必要があるが、 【生徒の解答】 では逆を調べていない。																	
	②	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと、 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $x=0$ で極小値 0 をとるから、 $f'(0)=0, \quad f(0)=0$ よって、 $c=0, \quad d=0$ また、 $x=2$ で極大値 4 をとるから、 $f'(2)=0, \quad f(2)=4$ よって、 $\begin{cases} 12a+4b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=4 \end{cases}$ この連立方程式を解いて、 $a=-1, \quad b=3, \quad c=0, \quad d=0$ ゆえに、 $f(x)=-x^3+3x^2 \dots\dots ①$ 逆に、関数 ① が条件を満たすことを示す。 $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$ $f'(x)=0$ とすると、 $x=0, 2$ 関数 ① の増減表は次のようになる。 <table border="1" style="margin: 10px auto; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>.....</td> <td>0</td> <td>.....</td> <td>2</td> <td>.....</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$\searrow$</td> <td>極小 0</td> <td>$\nearrow$</td> <td>極大 4</td> <td>$\searrow$</td> </tr> </table> したがって、関数 ① は $x=0$ で極小値 0、 $x=2$ で極大値 4 をとり、条件を満たす。 以上により、求める 3 次関数は $f(x)=-x^3+3x^2$	x		0		2		$f'(x)$	-	0	+	0	-	$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 4
x		0		2															
$f'(x)$	-	0	+	0	-														
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$														

2	2	2
2	2	

3

7