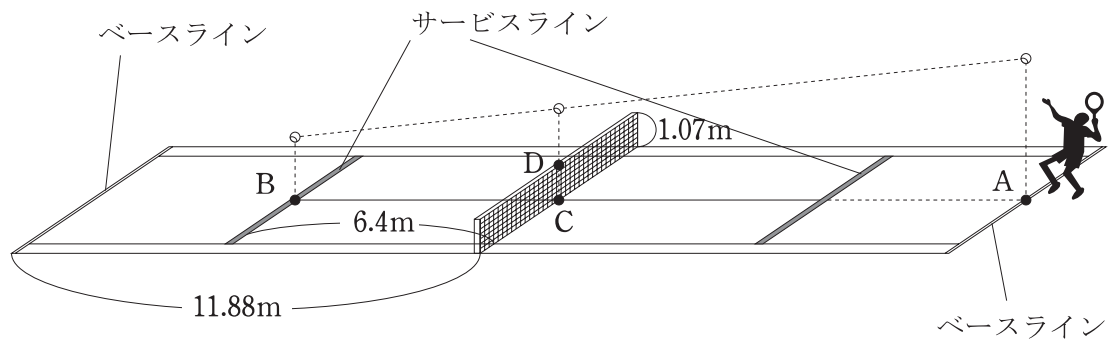


テニスの直線的なサーブを有効にするには？

問 太郎さんはテニスのサービス練習（サーブ練習）をしていた。なかなかサーブが入らず理由を考えた。ここで、テニスコートは下図のようにになっている。サーブが有効になるためには、サービスラインの内側にボールが落下しなければならない。



三角比の表

θ の値	$\tan \theta$ の値
7.0	0.1228
7.1	0.1246
7.2	0.1263
7.3	0.1281
7.4	0.1299
7.5	0.1317
7.6	0.1334
7.7	0.1352
7.8	0.1370
7.9	0.1388

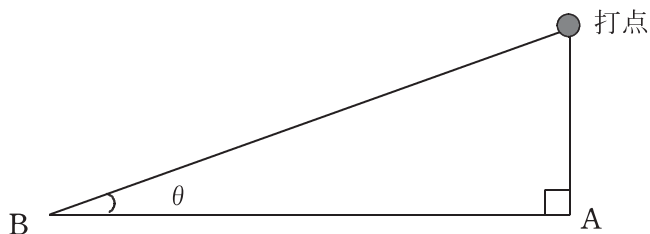
θ の値	$\tan \theta$ の値
8.0	0.1405
8.1	0.1423
8.2	0.1441
8.3	0.1459
8.4	0.1477
8.5	0.1495
8.6	0.1512
8.7	0.1530
8.8	0.1548
8.9	0.1566

θ の値	$\tan \theta$ の値
9.0	0.1584
9.1	0.1602
9.2	0.1620
9.3	0.1638
9.4	0.1655
9.5	0.1673
9.6	0.1691
9.7	0.1709
9.8	0.1727
9.9	0.1745

(1) 下の図について考える。Aの位置からBを狙ってサーブを打つ。太郎さんの身長は1.6mでラケットを使うと打点はプラス0.9mだから地面から打点までの高さは mである。ABの長さは mとなる。tan θ の値は小数第5位を四捨五入すると だから、三角比の表から $\theta =$ 約 $^{\circ}$ となる。

三角比の表を利用して、 ~ に入る適当な数値を記入しなさい。

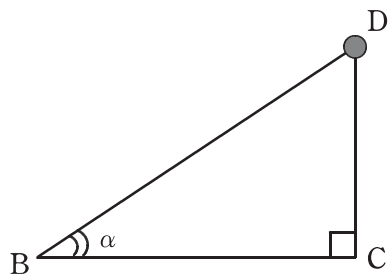
ただし、テニスボールの大きさは無視し、ABはサーブラインに垂直と考える。また、サーブは直線的に進むものとする。



ア		イ		ウ		エ	
---	--	---	--	---	--	---	--

(2) 図の点Cの真上のネット上の上端を点Dとする。∠DBC = α とするとき、角度 α は約 $^{\circ}$ である。三角比の表を利用して、 に入る適当な数値を記入しなさい。

また、この結果から、太郎さんのサーブは思い切り直線的に打つ方がよいか、それとも、変化を持たせて入れるサーブを打てばよいか、結論を考えなさい。



オ	
結 論	

(3) 思い切り直線的なサーブを打つためには何cm以上の身長が必要か。小数第3位を切り上げて求めなさい。ただし、ラケットを使うとき打点はプラス90cmとする。

1 出題の趣旨

数学Iの「三角比」を扱うことにした。目標は、日常的なできごとを三角比を用いて考察することである。これにより、数学の実用性を認識し、数学のよさを感じることである。この問題では、テニスにおけるサーブの打点の高さと落下ポイントが、サービスライン内側にくるための条件を取り上げた。生徒が具体的な直角三角形の図形を利用して、三角比の正接の値を求めることができ、さらに、三角比の表の読み取りから結論を導き出すことを意図している。この問題は中学校の「相似」や「三平方の定理」の応用につながるものである。「三角比」と「相似」の知識を利用して、数学的な見方や考え方、表現・処理の能力を育てることを含んでいる。

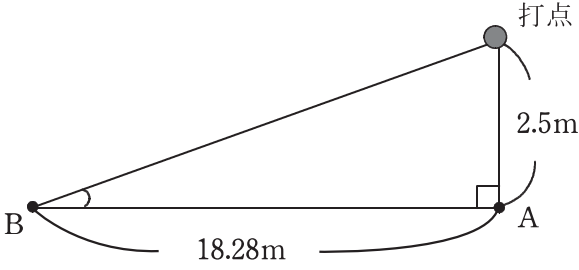
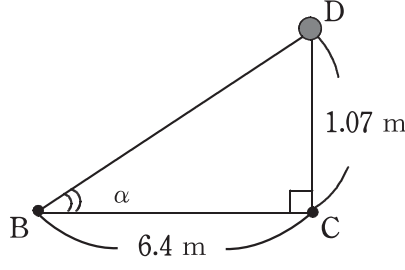
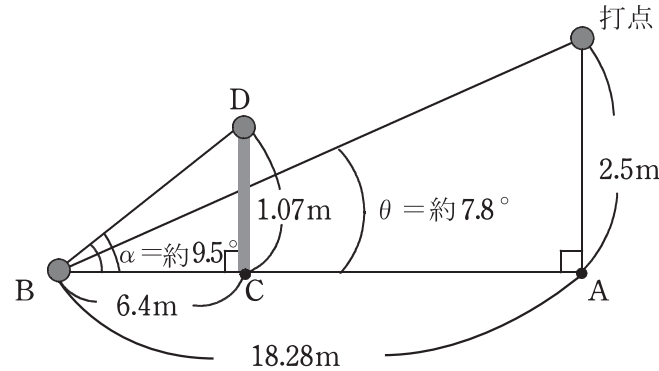
[四つの観点との対応]

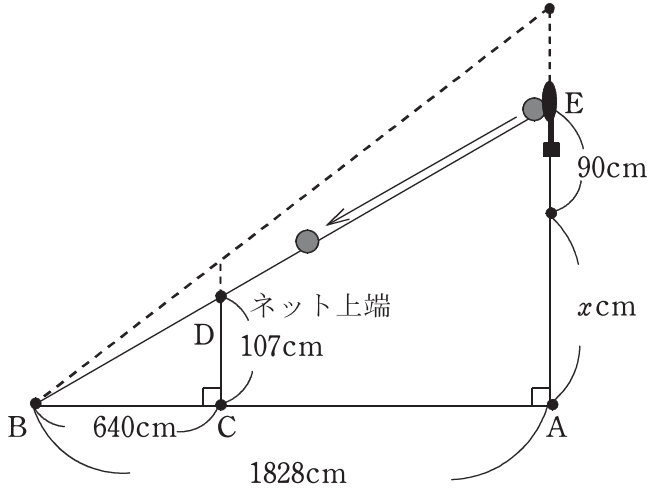
物事を数・量・図形などに着目して観察し的確にとらえること	与えられた情報を分類整理したり必要なものを適切に選択したりすること	筋道を立てて考えたり振り返って考えたりすること	事象を数学的に解釈したり自分の考えを数学的に表現したりすること
○	○	○	○

2 各問題の趣旨

問題番号	新学習指導要領における領域・内容	出題のねらい	評価の観点		
			え方 数学的な見方や考	表現・ 処理	知識・ 理解
(1)	第1 数学I 2 内容 (2) 図形と計量 三角比の意味やその基本的な性質について理解し、三角比を用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。	誘導方式の穴埋め問題になっている。直角三角形の図から、 $\tan \theta$ の値を求めさせ、三角比の表を利用することにより、 θ のおおよその角度を求めることができる。	○	○	○
(2)	ア 三角比 ア 鋭角の三角比 鋭角の三角比の意味と相互関係について理解すること。	(1)と同様に α のおおよその角度を求める。(1)と(2)の角度の算出結果から、角度 $\alpha >$ 角度 θ が分かり、これより、直線的なサーブの場合は身長160cmの太郎さんはサービスライン内側にボールを落下させることはできないことを説明することができる。	○	○	○
(3)	イ 図形の計量 三角比を平面図形や空間図形の考察に活用すること。	直線的なサーブの場合に、身長が何cm以上あれば、サービスライン内側にボールが落下するかを方程式を用いて、解くことができる。	○	○	○

3 正答と解説

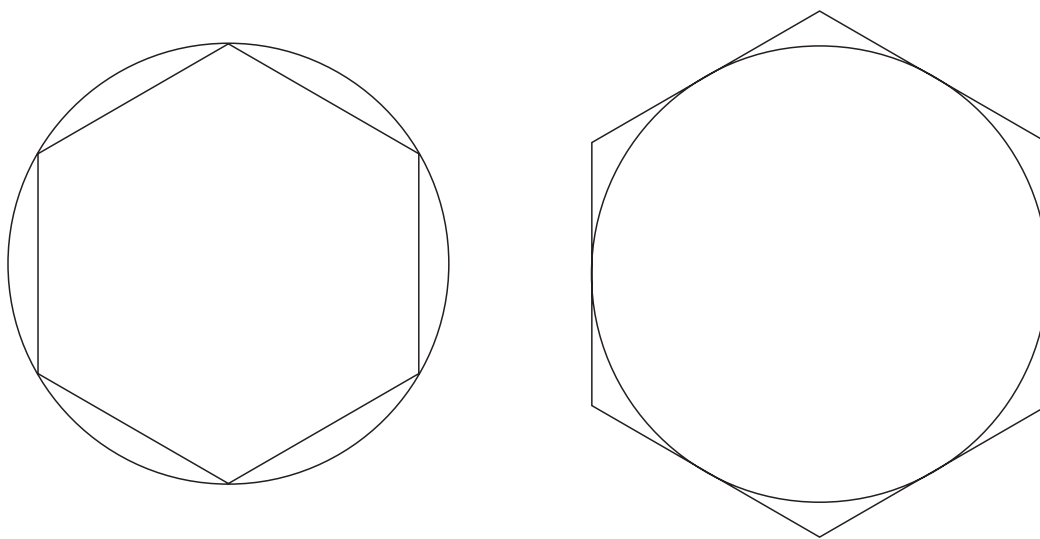
問題番号	正 答 (例)	解 説
(1)	<p>ア : $1.6\text{m} + 0.9\text{m} = 2.5(\text{m}) \dots$ (答)</p> <p>イ : $AB = 6.4\text{m} + 11.88\text{m} = 18.28(\text{m}) \dots$ (答)</p>  <p>ウ : $\tan \theta = \frac{2.5}{18.28} = 0.13676 \dots$ よって約 $0.1368 \dots$ (答)</p> <p>エ : 三角比の表より $\tan 7.8^\circ = 0.1370$ が一番近い値なので $\theta = \text{約} 7.8^\circ \dots$ (答)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ テニスコートについて、直角三角形を当てはめて考える。 ・ 正接 ($\tan \theta$) の定義に基づいて、割り算の計算をすることになる。その結果を三角比の表と比較して、角度の近似値を考える。
(2)	<p>オ :</p>  <p>ネットからサービスラインまで 6.4m、ネットの高さが 1.07m だから</p> $\tan \alpha = \frac{1.07}{6.4} = 0.1671875$ <p>三角比の表より $\tan 9.5^\circ = 0.1673$ が一番近い値なので $\alpha = \text{約} 9.5^\circ \dots$ (答)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・ (1) と同様に、角度の近似値を考える。 ・ (1) と (2) の図を合体した形で考えることが解法のポイントになる。 ・ $\tan \alpha$ については、値計算は小数第 2 位くらいまでの計算結果から判断してもよい。

<p>(2)</p>	<p>図のようになるので、ネット上端からサービスラインを結ぶ線と地面にできる角度αは、打点とサービスラインを結ぶ線と地面にできる各θより大きい。よって、直線的なサーブは入らないから、変化を持たせて入れるほうが良い。… (結論)</p>	
<p>(3)</p>	<p>仮に、直線的なサーブを打ち、ネット上端ぎりぎりを通過するときの選手の身長を x cm とする。 下図のように考えると</p>  <p>$\triangle BDC \sim \triangle BEA$ より $BC : CD = BA : AE$ これより $640 : 107 = 1828 : (x + 90)$ よって $640(x + 90) = 107 \times 1828$ $x = \frac{137996}{640} = 215.61875$</p> <p>ゆえに 直線的なサーブを打つためには、身長は215.62cm以上必要である。… (答) これより、ほとんどの選手は、直線的なサーブではサービスラインの内側に落下しないのが分かる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 相似の関係を使い、解法することに気づくかがポイントになる。不等式を用いて解くこともできる。 • (2) より $\tan \alpha = 0.1671875$ から、 $x + 90 = 1828 \times \tan \alpha$ を利用して解いてもよい。

正六角形、正十二角形と円周率 π との関係

問 半径が1の円Cがある。この円に内接あるいは外接する正 n 角形の周の長さを考える。 n を大きくすると、正 n 角形の周の長さはある値に近づく。

- (1) この円Cに内接する正六角形の周の長さを求めなさい。
また、この円Cに外接する正六角形の周の長さを求めなさい。ただし、 $\sqrt{3}=1.732$ とする。
- (2) (1)と同様に、この円Cに内接する正十二角形の周の長さを求めなさい。
また、この円Cに外接する正十二角形の周の長さを求めなさい。
ただし、 $\sin 15^\circ=0.2588$, $\tan 15^\circ=0.2679$ とする。
- (3) (1), (2)の結果から円周率 π について、考えられることを述べなさい。



半径1の円に内接する正六角形と、外接する正六角形

(1)	円Cに内接する正六角形の周の長さ		円Cに外接する正六角形の周の長さ	
(2)	円Cに内接する正十二角形の周の長さ		円Cに外接する正十二角形の周の長さ	
(3)				

1 出題の趣旨

数学I「図形と計量」では、三角比の意味やその基本的な性質について理解し、三角比を用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする事を目標とする。この問題では、円に内接する正十二角形や外接する正十二角形を作図、または読み取ることによって三角比の基本的な性質や三角比の値が有効に活用できる事を学ぶ。また、(1)は中学校第3学年で学ぶ「相似な図形の性質を具体的に活用すること」「三平方の定理を具体的に活用すること」を使うことのできる内容であり、その考え方をういて(2)の問題を解くことができる。中学校数学とのなだらかな接続という観点からも、その素地を養う意味合いも持つものである。

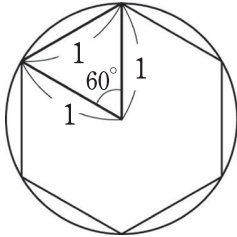
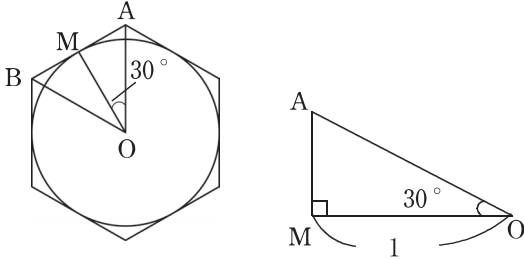
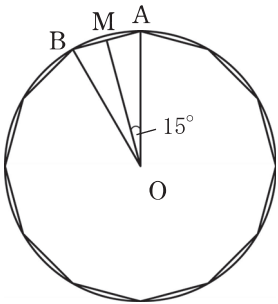
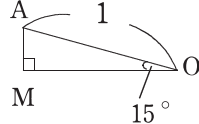
[四つの観点との対応]

物事を数・量・図形などに着目して観察し的確にとらえること	与えられた情報を分類整理したり必要なものを適切に選択したりすること	筋道を立てて考えたり振り返って考えたりすること	事象を数学的に解釈したり自分の考えを数学的に表現したりすること
○	○		○

2 各問題の趣旨

問題番号	新学習指導要領における領域・内容	出題のねらい	評価の観点		
			え方 数学的 な見方 や考	表現 ・ 処理	知識 ・ 理解
(1)	第1 数学I 2 内容 (2) 図形と計量 三角比の意味やその基本的な性質について理解し、三角比を用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。	中学3年生で学ぶ $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形の辺を用いて周の長さを求めることができる。			○
(2)	ア 三角比 ア 鋭角の三角比	三角比の値を具体的な事象において活用し、周の長さを求めることができる。		○	
(3)	イ 鋭角の三角比の意味と相互関係について理解すること。 イ 正弦定理・余弦定理 正弦定理や余弦定理について理解し、それらを用いて三角形の辺の長さや角の大きさを求めること。 イ 図形の計量 三角比を平面図形や空間図形の考察に活用すること。	(1), (2)をもとに円周率 π の値についての認識を深め、さらに精度を高めるための方法について考察する。	○		

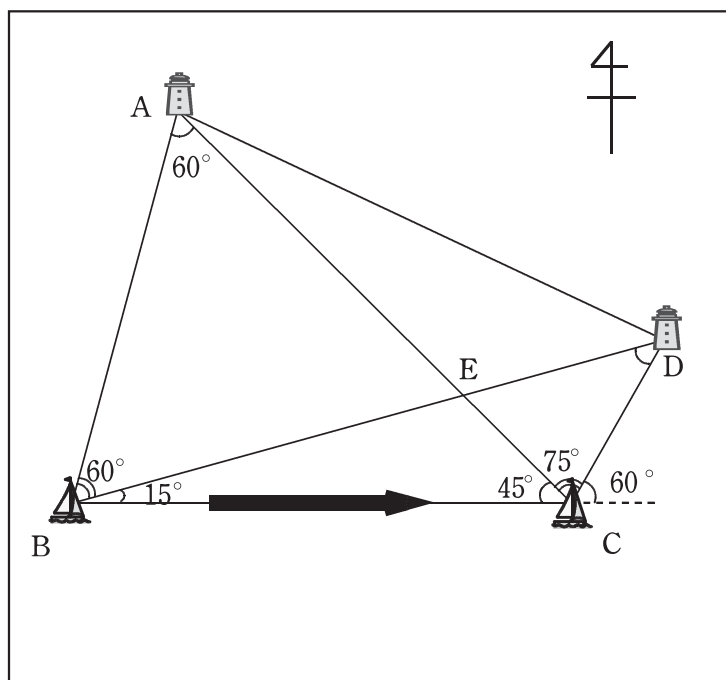
3 正答と解説

問題番号	正 答 (例)	解 説
(1)	<p>1 辺が 1 の正三角形ができるので、 $1 \times 6 = 6 \dots$ (答)</p>  <p>円の中心をO, 頂点をA, Bとする。 ABの中点Mで円に外接するので、 $OM = 1$ より $AM = 1 \times \tan 30^\circ$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} \times 12 = 4\sqrt{3} \dots$ (答)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • 学習のレベルによってははじめから図を与えてもよい。
(2)	<p>円の中心をO, 頂点をA, Bとする。 ABの中点Mをとると、$\angle AOM = 15^\circ$より、 $AM = 1 \times \sin 15^\circ = 0.2588$ $\therefore 0.2588 \times 24 = 6.2112 \dots$ (答)</p>  <p>(1) と同様に $AM = \tan 15^\circ = 0.2679$ $\therefore 0.2679 \times 24 = 6.4296 \dots$ (答)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • 正十二角形では、余弦定理を用いて求めることもできるが、2重根号をはずすことが必要になる。 • $\sin 15^\circ$ や $\tan 15^\circ$ の値を自力で求めさせてもよい。
(3)	<p>円周の長さは 2π であるから (1) より $6 < 2\pi < 4\sqrt{3}$ $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ $\therefore 3 < \pi < 3.464$ (2) より $6.2112 < 2\pi < 6.4296$ $\therefore 3.1056 < \pi < 3.2148$ 頂点の数を増やせば、π の値をより詳しく知ることができる。面積を用いても考えることができる。・・・など</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 平成15年度東京大学の入試問題をもとにしたものである。学習の到達度によって様々なアプローチが考えられる。 • 単に箇条書きに書かせるだけでなく、考察の内容をレポート形式にまとめさせてもよい。

海上における4地点からの距離

問 ヨットが日本海上のB地点からC地点に $6\sqrt{7}$ kmだけ進んだ。B地点においてはDの灯台の光は真東を向いて北側に 15° の方向に、灯台Aの光は真東を向いて北側に 75° の方向に見えた。また、地点Cにおいては、灯台Aの光は真西を向いて北側に 45° 、灯台Dの光は真東を向いて北側に 60° の方向に見えた。以上のことから下の図を描くことができた。ただし、距離の単位はkmとする。

- (1) 距離BDを求めなさい。
- (2) 距離ABを求めなさい。
- (3) 距離ADを求めなさい。
- (4) 右下の三角比の表を利用して、 $\angle BDA$ を求めなさい。ただし、 $\sqrt{7} = 2.646$ とする。



三角比の表

角($^\circ$)	余弦(cos)
35	0.8192
36	0.8090
37	0.7986
38	0.7880
39	0.7771
40	0.7660
41	0.7547
42	0.7431
43	0.7314

(1)		(2)		(3)		(4)	
-----	--	-----	--	-----	--	-----	--

1 出題の趣旨

実際に海上の距離の測定は、容易ではない。ヨットから見える灯台の光から角度を見出し、唯一わかるヨットの移動距離BCによって、その他の距離が測定可能になる。これに対して三角比を用いることの有用性を認識して欲しいところである。また、中学校までは、長さや角度を相似や補助線を引くなどして図形的に求めてきたが、高校では適当な三角形に、正弦定理や余弦定理を用いることによって答えを導き出すことができる。どこの三角形にどの定理を適用すれば、有効的に働くかどうかという判断も数学的な見方や考え方が必要とされる部分である。ここでは段階的に長さを求めさせ、順序よく解けるように問題構成をしたが、直に距離ADを求めるためには、筋道を立てて先を見通すことが必要な問題である。さらに、正弦・余弦・正接の値から角度が算出されることも留意したいところである。

[四つの観点との対応]

物事を数・量・図形などに着目して観察し的確にとらえること	与えられた情報を分類整理したり必要なものを適切に選択したりすること	筋道を立てて考えたり振り返って考えたりすること	事象を数学的に解釈したり自分の考えを数学的に表現したりすること
○		○	○

2 各問題の趣旨

問題番号	新学習指導要領における領域・内容	出題のねらい	評価の観点		
			え 方 数 学 的 な 見 方 や 考	表 現 ・ 処 理	知 識 ・ 理 解
(1)	第1 数学I 2 内容 (2) 図形と計量 三角比の意味やその基本的な性質について理解し、三角比を用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。	適当な三角形を探し、正弦定理を利用するべきか、余弦定理を利用するべきかの判断ができる。 また、正弦定理と余弦定理を理解している。	○	○	
(2)	ア 三角比	適当な三角形を探し、正弦定理を利用できる。	○	○	
(3)	(ア) 鋭角の三角比 鋭角の三角比の意味と相互関係について理解すること。	$\triangle ABD$ において、余弦定理を用いて長さを求めることができる。	○	○	○
(4)	(イ) 正弦定理・余弦定理 正弦定理や余弦定理について理解し、それらを用いて三角形の辺の長さや角の大きさを求めること。 イ 図形の計量 三角比を平面図形や空間図形の考察に活用すること。	三角比の表を用いて、余弦の値から角度を求めることができる。	○		○

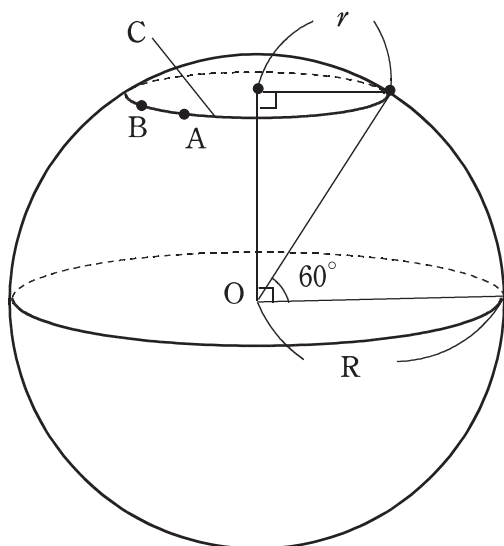
3 正答と解説

問題番号	正 答 (例)	解 説
(1)	$\frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{6\sqrt{7}}{\sin 45^\circ}$ ($\angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle BCD$ より) $BD = \frac{6\sqrt{7}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{42}$ これよりBDの距離は $3\sqrt{42}$ kmである。… (答)	<ul style="list-style-type: none"> BDを含む$\triangle BCD$を探し出し、1辺と2つの角が分かっているので$\triangle BCD$において正弦定理を利用する。
(2)	$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$ $AB = \frac{6\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{42}$ これよりABの距離は $2\sqrt{42}$ kmである。… (答)	<ul style="list-style-type: none"> 同様にABを含む$\triangle ABC$を探し出し、1辺と2つの角が分かっているので$\triangle ABC$において正弦定理を利用する。
(3)	$\begin{aligned} \triangle ABD \text{において、余弦定理を用いて} \\ AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos 60^\circ \\ &= (2\sqrt{42})^2 + (3\sqrt{42})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{42} \cdot 3\sqrt{42} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 168 + 378 - 252 \\ &= 294 \\ AD > 0 \text{より } AD &= \sqrt{294} = 7\sqrt{6} \end{aligned}$ これよりADの距離は $7\sqrt{6}$ kmである。… (答)	<ul style="list-style-type: none"> ADを含む$\triangle ABD$を探し出し、(1)と(2)より、2辺と1つの角が分かるので$\triangle ABD$において余弦定理を利用する。
(4)	$\begin{aligned} \triangle ABD \text{において、余弦定理を用いて} \\ \cos \angle BDA &= \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot BD} \\ &= \frac{(7\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{42})^2 - (2\sqrt{42})^2}{2 \cdot 7\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{42}} \\ &= \frac{294 + 378 - 168}{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \quad (\text{条件より } \sqrt{7} = 2.646) \\ &= \frac{2 \times 2.646}{7} \\ &= 0.756 \end{aligned}$ 三角比の表から $\angle BDA$ は約 41° である。… (答)	<ul style="list-style-type: none"> 以上から、$\triangle ABD$において、3辺の長さが分かるので、余弦定理を利用する。余弦の値を求め、小数に直し三角比の表から角度を求める。このように、角度の出し方は、相似や補助線を引かずに、三角比の知識を利用して求めることができる。

球面上の2点間の最短距離

問 球面上の最短コースは「球の中心を通る平面で切ったときにできる円の周上」にある。この性質を利用して、地球上の2点A（北緯60°，東経40°），B（北緯60°，西経20°）の球面上での最短距離 l を求めてみよう。ただし、地球は完全な球であるものとし、半径を R とする。また、円周率 π を3.14とし、単位はkmとする。

- (1) 北緯60°の緯線で地球を切断したときにできる円Cの半径 r を R を用いて表しなさい。
- (2) 円Cの弦ABの長さ L を R を用いて表しなさい。
- (3) 地球の中心を O とすると、右下の三角比の表を利用して、最も適当な $\angle AOB$ を整数値で求めなさい。
- (4) (3)を利用して、最短距離 l を求めなさい。ただし、 $R=6,378\text{km}$ とし、計算値は小数第1位を四捨五入して整数値で答えなさい。



三角比の表

角($^\circ$)	余弦(cos)
26	0.8988
27	0.8910
28	0.8829
29	0.8746
30	0.8660
31	0.8572
32	0.8480
33	0.8387
34	0.8290

(1)		(2)		(3)		(4)	
-----	--	-----	--	-----	--	-----	--

1 出題の趣旨

地球上の2点間の距離を、円や三角形に注目しながら求める問題である。三角比を具体的な事象の考察に活用することで、数学の世界と現実の世界がつながっていることを感じて欲しい。また、空間図形の問題では立体を様々な角度から見つめ、適切に平面図形を取り出すことで問題解決しやすくなることを認識させたい。今回は学習し身に付けたものを他教科（地理）の知識と関連させることで、数学の有用性を生徒が実感し、さらに学ぶ意欲がでるように配慮した。また、計算が複雑にならないように緯度、経度を設定してある。発展問題として、ほぼ同緯度である青森市とニューヨーク間の距離を求めさせるとより身近な問題となり、さらに意欲を引き出せると思う。大学で専門的に学ぶ「球面幾何学」につながる内容である。

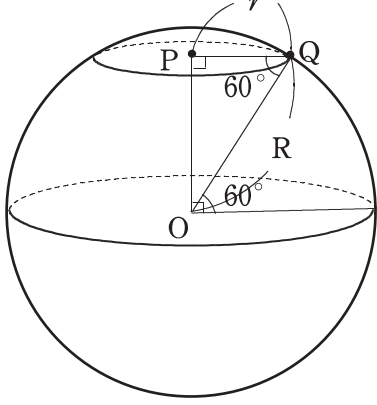
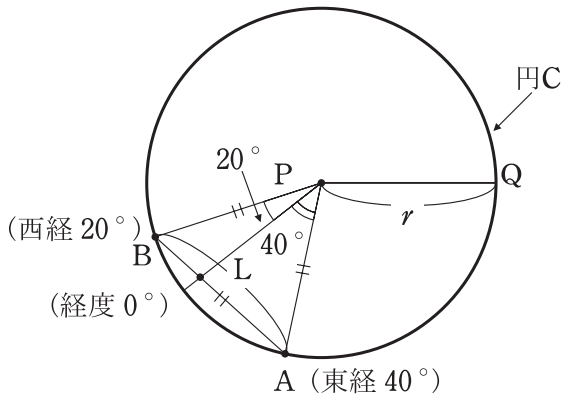
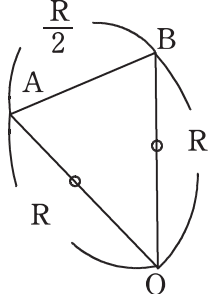
[四つの観点との対応]

物事を数・量・図形などに着目して観察し的確にとらえること	与えられた情報を分類整理したり必要なものを適切に選択したりすること	筋道を立てて考えたり振り返って考えたりすること	事象を数学的に解釈したり自分の考えを数学的に表現したりすること
○		○	○

2 各問題の趣旨

問題番号	新学習指導要領における領域・内容	出題のねらい	評価の観点		
			数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
(1)	第1 数学I 2 内容 (2) 図形と計量 三角比の意味やその基本的な性質について理解し、三角比を用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。	図を利用して地球の緯度 60° 上に位置する地点は円の軌跡を描くことを認識し、その半径 r を R を用いて表すことができる。		○	○
(2)	ア 三角比 ア 鋭角の三角比 鋭角の三角比の意味と相互関係について理解すること。	円Cの中心から2点A, Bに補助線を引き、円の半径と経度差に注目することで、正三角形に気付くことができる。	○	○	○
(3)	イ 鈍角の三角比 三角比を鈍角まで拡張する意義を理解し、鋭角の三角比の値を用いて鈍角の三角比の値を求めること。	余弦定理を用いて、 $\triangle OAB$ の3辺から、 $\angle AOB$ を求めることができる。 三角比の表を適切に利用することができる。		○	○
(4)	イ 正弦定理・余弦定理 正弦定理や余弦定理について理解し、それらを用いて三角形の辺の長さや角の大きさを求めること。 イ 図形の計量 三角比を平面図形や空間図形の考察に活用すること。	(3)の結果を用いて、弧ABの長さを求めることができる。	○	○	○

3 正答と解説

問題番号	正 答 (例)	解 説
(1)	<p>下図のように点P, Qをとる。(点Pは円Cの中心) 錯角の性質より$\angle OQP=60^\circ$である。 これより $r = R\cos 60^\circ = \frac{R}{2} \dots$ (答)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> 図を見ながら, 錯角と直角三角形の余弦の性質を利用して, r と R の関係式を立式する。 60° や直角の表示を消した図を与えると難易度が上がる。 $\triangle OPQ$ について三平方の定理 ($1:\sqrt{3}:2$) を用いても解くことができる。
(2)	<p>円Cを真上から見ると下図のようになる。</p>  <p>$\triangle PAB$ は正三角形なので, $L=r=\frac{R}{2} \dots$ (答)</p>	<ul style="list-style-type: none"> 円Cの中心から2点A, Bに補助線を引くことができるかがポイントになる。 $\angle BPA$ は経度差と等しくなる。 $\triangle PAB$ について余弦定理を用いても求めることができる。
(3)	 <p>$\triangle OAB$ について余弦定理より $\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}$ $= \frac{R^2 + R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2 \cdot R \cdot R} = \frac{7}{8} = 0.875$ 三角比の表より, 整数値としてもっとも適当なものは $\angle AOB = 29^\circ \dots$ (答)</p>	<ul style="list-style-type: none"> 余弦定理により求めた余弦の値を三角比の表と比較して, 角度の近似値を求めることができる。
(4)	$\ell = 2\pi R \times \left(\frac{29^\circ}{360^\circ}\right) = 2 \times 3.14 \times 6378 \times \frac{29}{360}$ $= 3226.55933 \dots$ 小数第1位を四捨五入して, $\ell = 3227$ (km) \dots (答)	<ul style="list-style-type: none"> $\angle AOB$ の値をより正確な値にすることで, 最短距離もさらに正確に求めることができる。