平成25年度AIRIS

統計の基礎(4)

・χ2乗検定

平成25年10月17日

防衛医学研究センター　感染症疫学対策研究官
教授　加來浩器　(KAKU　KOKI)

前回の復習

2つの群のデータ比較の流れ

A群
平均
不偏分散
標準偏差
信頼区間

B群
平均
不偏分散
標準偏差
信頼区間

A群とB群とに差があるかを検討する。
まず、帰無仮説「A群とB群とに差はない」を立てる。
帰無仮説を採択するか、棄却するかを決める。
帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」
帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択し、
「差はないとは言えない、すなわち差はある」と結論

前回の復習

2つの群のデータ比較の流れ

A群

平均
不偏分散
標準偏差
信頼区間

B群

平均
不偏分散
標準偏差
信頼区間

両群のデータに差が無い

→両群の平均値の差の95%信頼区間が0をまたいでいる。

A群がB群と差があり（大きい）の場合

→A群とB群の差の95%信頼区間は、プラス値である。

A群がB群と差があり（小さい）の場合

→A群とB群の差の95%信頼区間は、マイナス値である。

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

観察値

期待値

観察値と期待値とに差があるかを検討する。

まず、帰無仮説[観察値と期待値とに差はない」を立てる。

帰無仮説を採択するか、棄却するかを決める。

帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」

帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択し、「差はないとは言えない、すなわち差はある」と結論

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

観察値

期待値

観察値と期待値とに差（ばらつき）を$\chi 2$乗値で検討する。

Χ2乗値が自由度によって決まる限界値よりも小さい場合
帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」

Χ2乗値が自由度によって決まる限界値よりも大きい場合
帰無仮説が棄却され、「両群に有意な差がある」

バラツキの程度の考え方

- 平均からのばらつきの数値化として分散を考えた。
  - 標本分散：{（実測値-平均）の2乗 の総数}／n
  - 不偏分散：{（実測値-平均）の2乗の総数}／n-1
- 期待値からのばらつきの数値化として
  - （観察値-期待値）の2乗を用いる
  - ・・・

Ａ中学校1年生男子の200名の血液型を調べてみた。

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察値（O）	90	50	10	50	200

日本人の血液型は、A型が40%、B型が20%、AB型が10%、O型が30%であることが知られている

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
期待値（E）	80	40	20	60	200

Ａ中学校1年生男子200名の血液型分布は、日本人の血液型分布と差があるのだろうか？

Ａ中学校1年生男子の200名の血液型を調べてみた。

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察値（O）	90	50	10	50	200
期待値（E）	80	40	20	60	200
観察値−期待値 （O−E）	10	10	−10	−10	0
（観察値−期待値）2乗 $(O-E)^2$	100	100	100	100	400
（観察値−期待値）^{2}/期待値 $(O-E)^2/E$	1.25	2.5	5	1.67	10.42

分散の時に（実数-平均）^{2}を計算したことを思い出して、
（観察値−期待値）^{2}を計算してみる
（観察値−期待値）^{2}をそれぞれの期待値で除して、
その総和は、観察値と期待値のずれを示す指標　χ2乗値

χ2乗値とは、

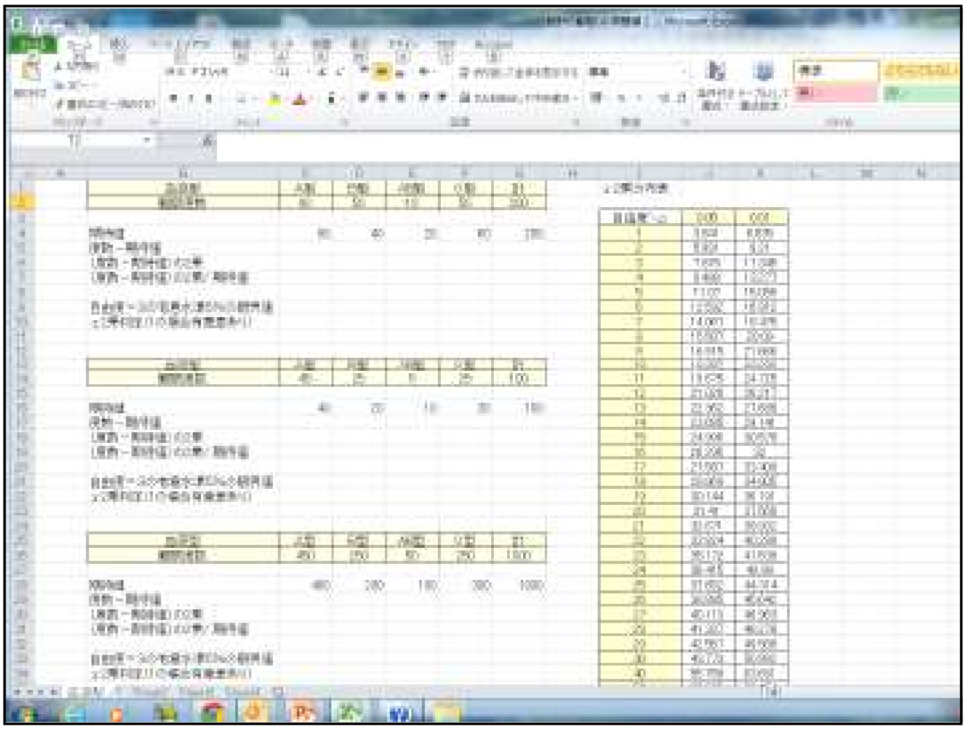
｛(観察値－期待値)^2÷期待値｝ の総和

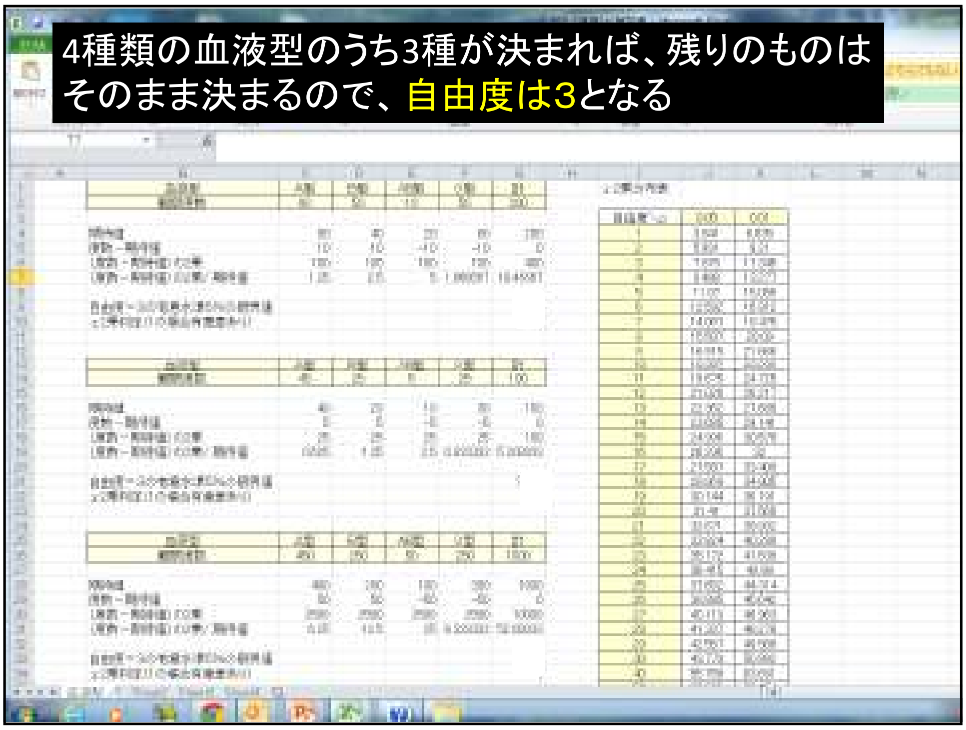
観察値が期待値に完全に一致するとχ2乗値は、0

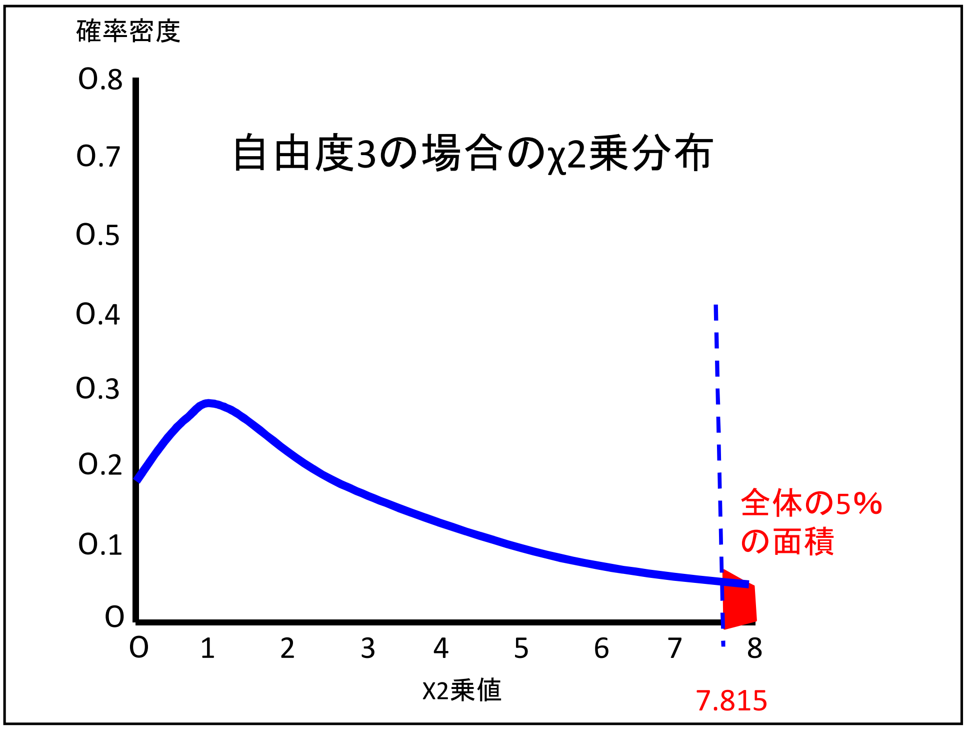
期待値とのずれが大きいとχ2乗値は、大きくなる

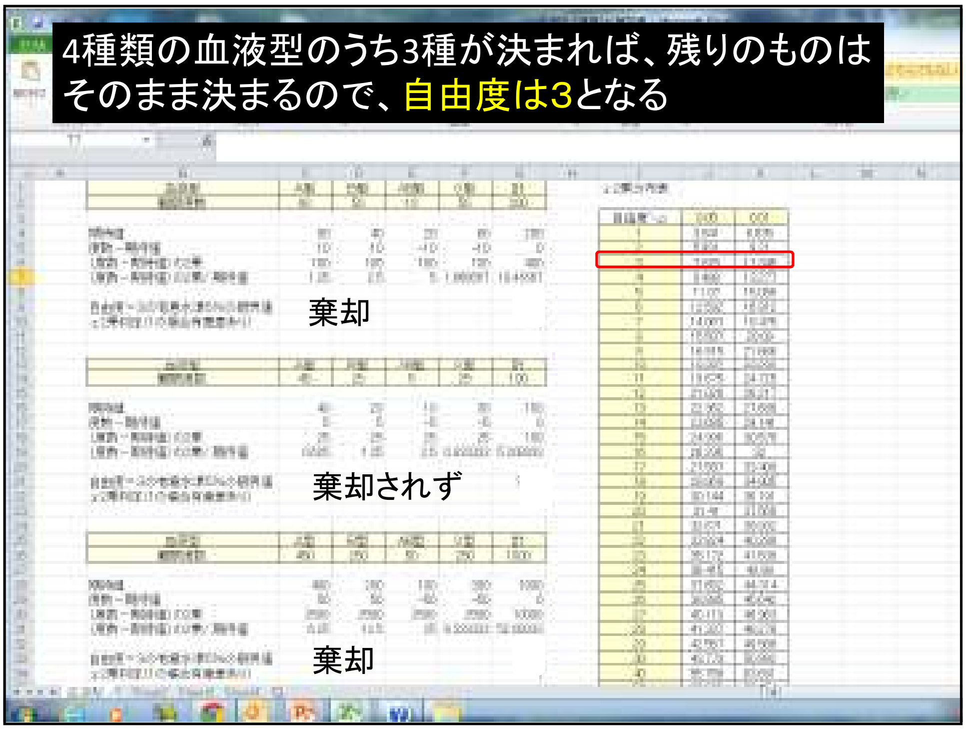
Χ2乗値がどれだけ大きければ、有意なずれといえるか？

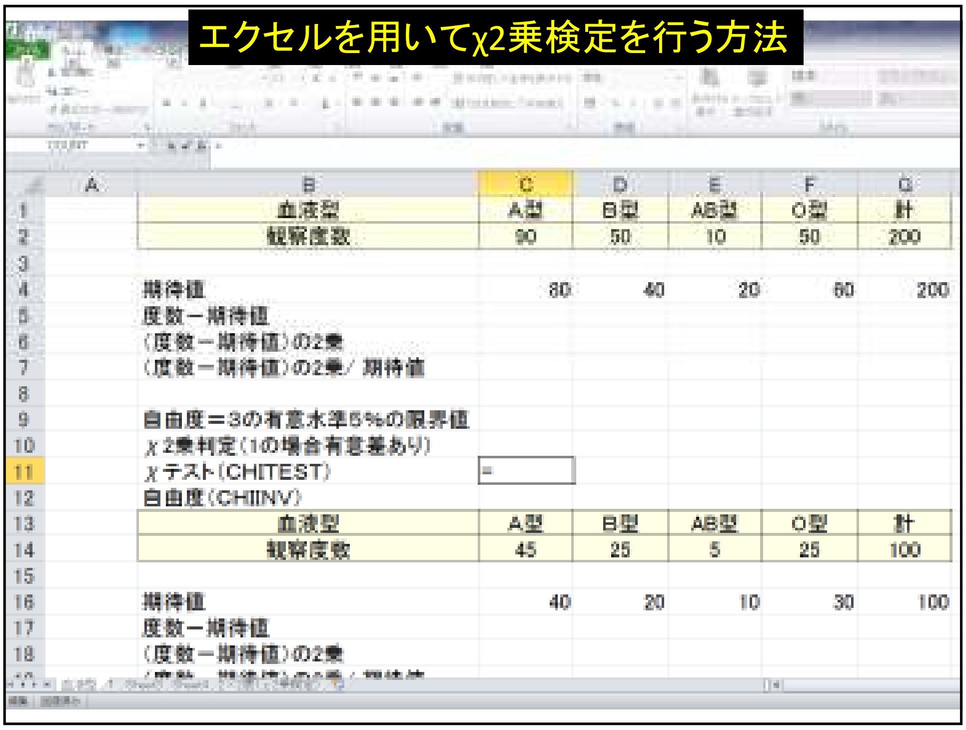
Χ2乗分布で検討する




4種類の血液型のうち3種が決まれば、残りのものは
そのまま決まるので、自由度は3となる


確率密度
0.8
0.7
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
自由度3の場合のχ2乗分布
全体の5%
の面積
0
1
2
3
4
5
6
7
8
X2乗値
7.815





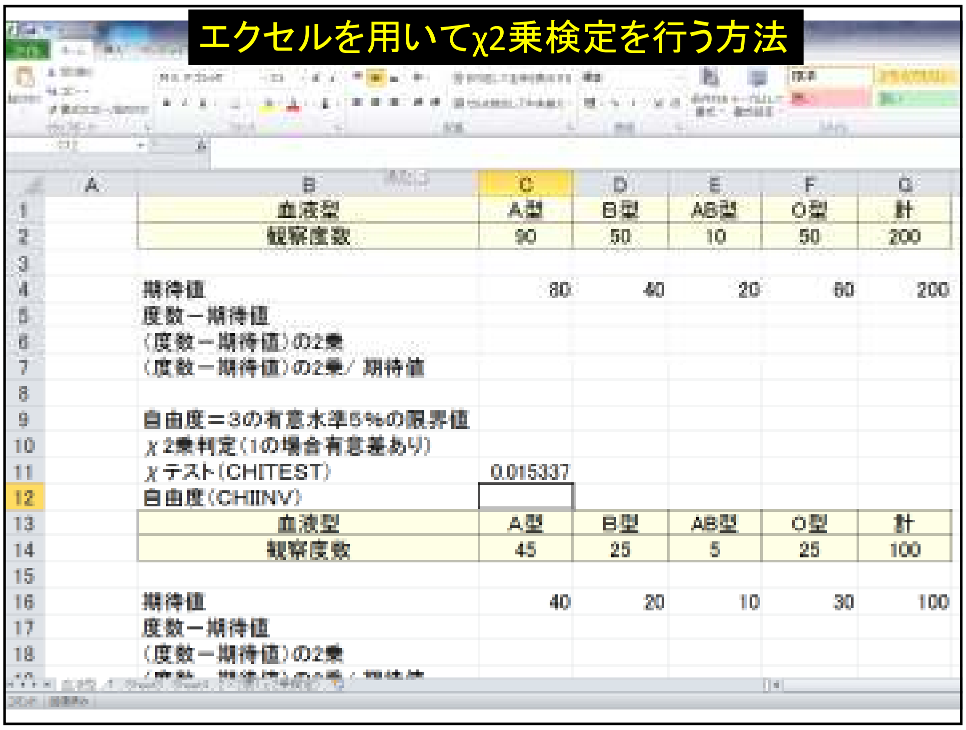
	A	B	C	D	E	F	G
1		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
2		観察度数	90	50	10	50	200
3							
4		期待値	80	40	20	60	200
5		度数ー期待値					
6		(度数ー期待値)の2乗					
7		(度数ー期待値)の2乗/ 期待値					
8							
9		自由度=3の有意水準5%の限界値					
10		χ2乗判定(1の場合有意差あり)					
11		χテスト(CHITEST)	=				
12		自由度(CHIINV)					
13		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
14		観察度数	45	25	5	25	100
15							
16		期待値	40	20	10	30	100
17		度数ー期待値					
18		(度数ー期待値)の2乗					

エクセルを用いてχ2乗検定を行う方法

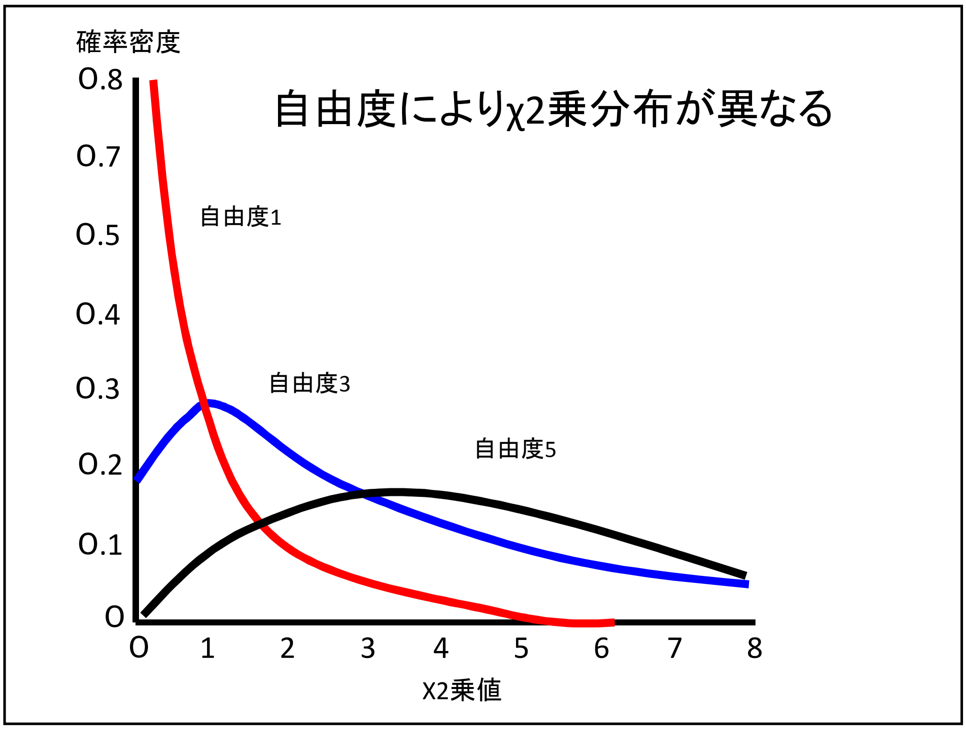
	A	B	C	D	E	F	G
1		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
2		観察度数	90	50	10	50	200
3							
4		期待値	80	40	20	60	200
5		度数ー期待値					
6		(度数ー期待値)の2乗					
7		(度数ー期待値)の2乗／期待値					
8							
9		自由度＝3の有意水準5%の限界値					
10		χ2乗判定(1の場合有意差あり)					
11		χテスト(CHITEST)	=chitest(C2:F2				
12		自由度(CHIINV)					
13		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
14		観察度数	45	25	5	25	100
15							
16		期待値	40	20	10	30	100
17		度数ー期待値					
18		(度数ー期待値)の2乗					

エクセルを用いてχ2乗検定を行う方法

	A	B	C	D	E	F	G
1		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
2		観察度数	90	50	10	50	200
3							
4		期待値	80	40	20	60	200
5		度数ー期待値					
6		(度数ー期待値)の2乗					
7		(度数ー期待値)の2乗／期待値					
8							
9		自由度＝3の有意水準5%の限界値					
10		χ2乗判定(1の場合有意差あり)					
11		χテスト(CHITEST)	=chitest(C2:F2,C4:F4)				
12		自由度(CHIINV)					
13		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
14		観察度数	45	25	5	25	100
15							
16		期待値	40	20	10	30	100
17		度数ー期待値					
18		(度数ー期待値)の2乗					



	A	B	C	D	E	F	G
1		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
2		観察度数	90	50	10	50	200
3							
4		期待値	80	40	20	60	200
5		度数ー期待値					
6		(度数ー期待値)の2乗					
7		(度数ー期待値)の2乗／期待値					
8							
9		自由度＝3の有意水準5%の限界値					
10		χ2乗判定(1の場合有意差あり)					
11		χテスト(CHITEST)	0.015337				
12		自由度(CHIINV)					
13		血液型	A型	B型	AB型	O型	計
14		観察度数	45	25	5	25	100
15							
16		期待値	40	20	10	30	100
17		度数ー期待値					
18		(度数ー期待値)の2乗					



今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

A群の
観察値
分布

B群の
観察値
分布

A群の観察値とB群の観察値に差があるかを検討する。

まず、帰無仮説「両群とに差はない」を立てる。

帰無仮説を採択するか、棄却するかを決める。

帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」

帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択し、「差はないとは言えない、すなわち差はある」と結論

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

1年男子
の身長
146㎝未満
146㎝以上

1年女子
の身長
146㎝未満
146㎝以上

男子と女子の身長に差があるかを検討する。

帰無仮説「男子と女子の身長分布に差はない」

男子と女子の身長分布に差が無いとした時のそれぞれの期待値を求める。

実測値と期待値の分布のばらつきを$\chi 2$乗値で調べる。

Ａ中学校1年生の男子と女子の身長を調べてみた。

実測値	146ｃｍ未満	146ｃｍ以上	合計
男子	80	120	200
女子	60	150	210
合計	140	270	410

男子と女子とで身長に差が無いとした場合の分布は？

期待値	146ｃｍ未満	146ｃｍ以上	合計
男子	？	？	200
女子	？	？	210
合計	140	270	410

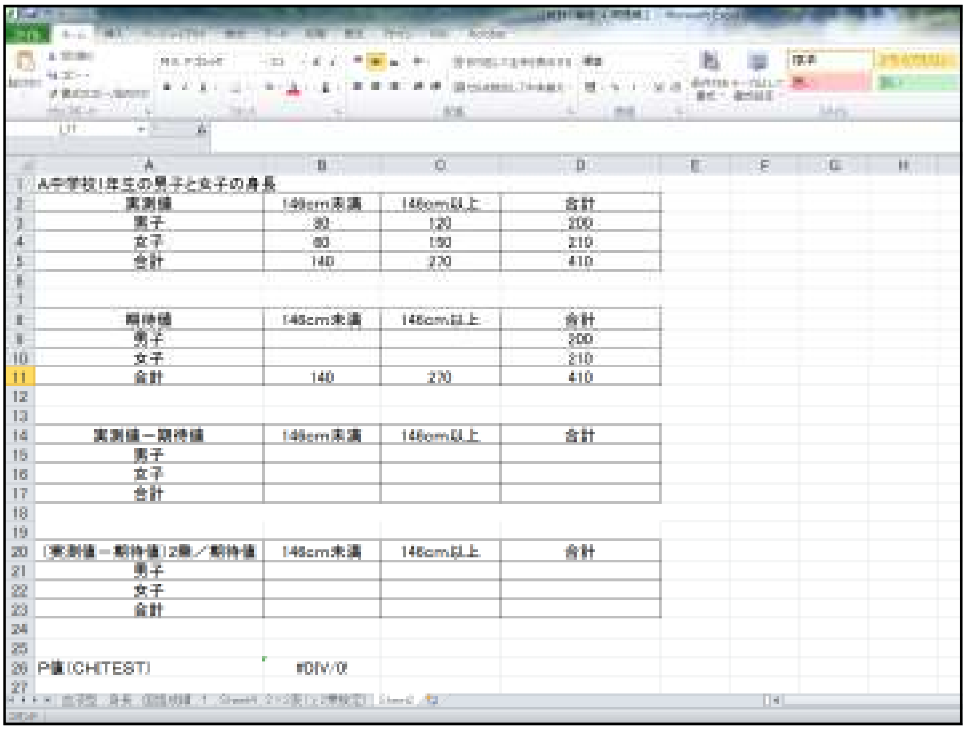
146cm未満の男子は、 200名中　140／410の割合なので

200×140／410＝68.3

実測値(O)	146ｃｍ未満	146ｃｍ以上	合計
男子	80	120	200
女子	60	150	210
合計	140	270	410

期待値(E)	146ｃｍ未満	146ｃｍ以上	合計
男子	68.3	131.7	200
女子	71.7	138.3	210
合計	140	270	410

$(O-E)^2/E$	146ｃｍ未満	146ｃｍ以上	合計
男子	2.01	1.04	3.05
女子	1.91	0.99	2.90
合計	3.92	2.03	5.95



A中学校1年生の男子と女子の身長

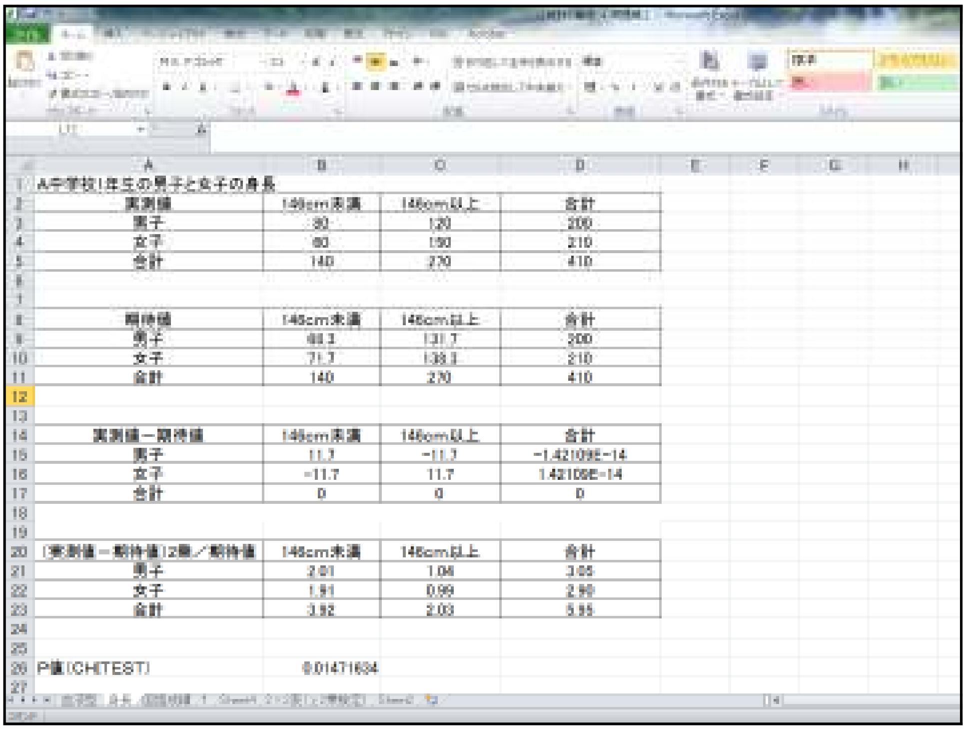
実測値	146cm未満	146cm以上	合計
男子	80	120	200
女子	60	150	210
合計	140	270	410

期待値	146cm未満	146cm以上	合計
男子			200
女子			210
合計	140	270	410

実測値−期待値	146cm未満	146cm以上	合計
男子			
女子			
合計			

(実測値−期待値)2乗／期待値	146cm未満	146cm以上	合計
男子			
女子			
合計			

P値(CHITEST) #DIV/0!



A中学校1年生の男子と女子の身長

実測値	146cm未満	146cm以上	合計
男子	80	120	200
女子	60	150	210
合計	140	270	410

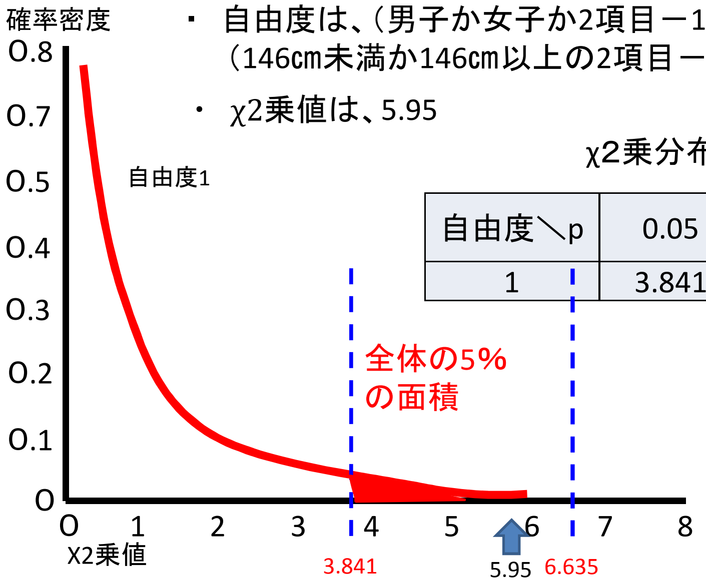
期待値	146cm未満	146cm以上	合計
男子	68.3	131.7	200
女子	71.7	138.3	210
合計	140	270	410

実測値−期待値	146cm未満	146cm以上	合計
男子	11.7	-11.7	-1.42109E-14
女子	-11.7	11.7	1.42109E-14
合計	0	0	0

(実測値−期待値)2乗／期待値	146cm未満	146cm以上	合計
男子	2.01	1.04	3.05
女子	1.91	0.99	2.90
合計	3.92	2.03	5.95

P値(CHITEST) 0.01471634

- 自由度は、（男子か女子か2項目ー1）× （146cm未満か146cm以上の2項目ー1） ＝1
- χ2乗値は、5.95



χ2乗分布表

自由度＼p	0.05	0.01
1	3.841	6.635

結論：身長の男女差は、有意（有意水準5%以下1%以上）であった。

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

1年男子
国語成績
優：80点以上
良：79～60点
不可：59点未満

1年女子
国語成績
優：80点以上
良：79～60点
不可：59点未満

男子と女子の国語成績に差があるかを検討する。
帰無仮説「男子と女子の国語成績分布に差はない」

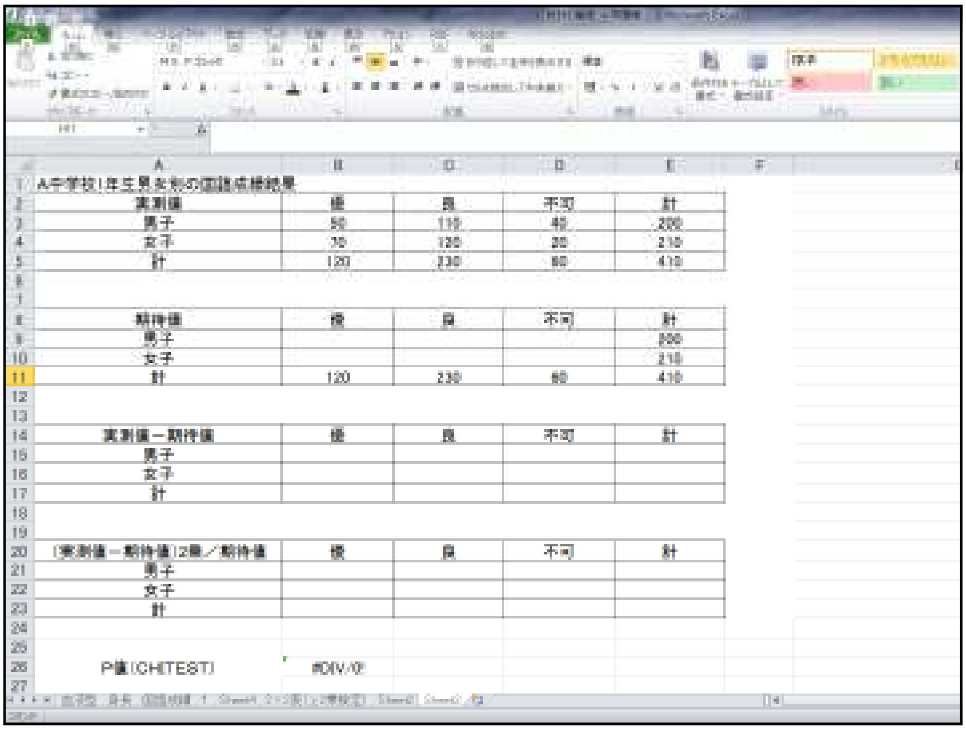
男子と女子の国語成績分布に差が無いとした時のそれぞれの期待値を求める。
実測値と期待値の分布のばらつきをχ2乗値で調べる。

A中学校1年生の国語成績結果

実測値	優	良	不可	計
男子	50	110	40	200
女子	70	120	20	210
計	120	230	60	410

期待値	優	良	不可	計
男子	58.54	112.20	29.27	200
女子	61.46	117.80	30.73	210
計	120	230	60	410

$(O-E)^2/E$	優	良	不可	計
男子	1.24	0.04	3.93	5.22
女子	1.19	0.04	3.75	4.97
計	2.43	0.08	7.68	10.20



A中学校1年生男女別の国語成績結果

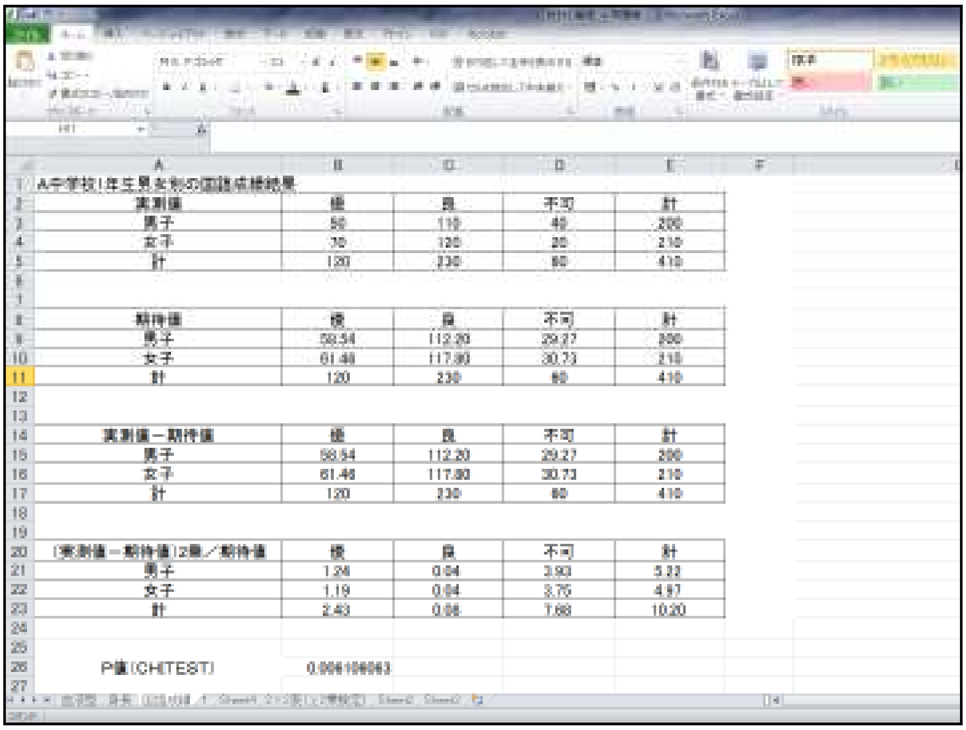
実測値	優	良	不可	計
男子	50	110	40	200
女子	70	120	20	210
計	120	230	60	410

期待値	優	良	不可	計
男子				200
女子				210
計	120	230	60	410

実測値−期待値	優	良	不可	計
男子				
女子				
計				

(実測値−期待値)2乗／期待値	優	良	不可	計
男子				
女子				
計				

P値(CHITEST) #DIV/0!



A中学校1年生男女別の国語成績結果

実測値	優	良	不可	計
男子	50	110	40	200
女子	70	120	20	210
計	120	230	60	410

期待値	優	良	不可	計
男子	58.54	112.20	29.27	200
女子	61.46	117.80	30.73	210
計	120	230	60	410

実測値－期待値	優	良	不可	計
男子	58.54	112.20	29.27	200
女子	61.46	117.80	30.73	210
計	120	230	60	410

(実測値－期待値)2乗／期待値	優	良	不可	計
男子	1.24	0.04	3.93	5.22
女子	1.19	0.04	3.75	4.97
計	2.43	0.08	7.68	10.20

P値(CHITEST) 0.006106063

- χ2乗値は、10.20
- 自由度は、(男女:2ー1)×((優・良・不可:3ー1)　＝2

χ2乗分布表

自由度＼p	0.05	0.01
1	3.841	6.635
2	5.991	9.21
3	7.815	11.345
4	9.488	13.277
5	11.07	15.086
6	12.592	16.812

結論:国語成績の男女差は、有意(有意水準1%以下)であった。