

平成25年度AIRIS

統計の基礎(4)

・ χ^2 乗検定

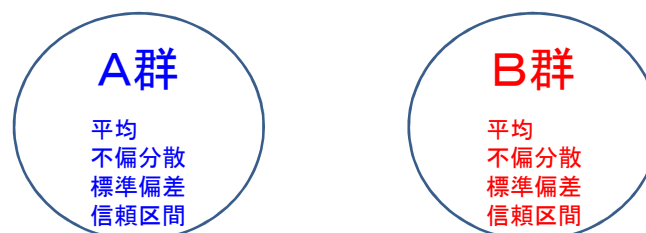
平成25年10月17日

防衛医学研究センター 感染症疫学対策研究官

教授 加來浩器 (KAKU KOKI)

前回の復習

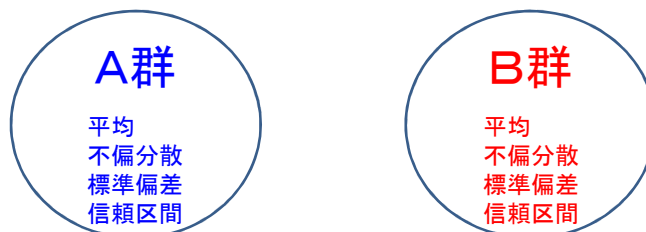
2つの群のデータ比較の流れ



A群とB群とに差があるかを検討する。
まず、帰無仮説「A群とB群とに差はない」を立てる。
帰無仮説を採択するか、棄却するかを決める。
帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」
帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択し、
「差はないとは言えない、すなわち差はある」と結論

前回の復習

2つの群のデータ比較の流れ



両群のデータに差が無い

→両群の平均値の差の95%信頼区間が0をまたいでいる。

A群がB群と差があり(大きい)の場合

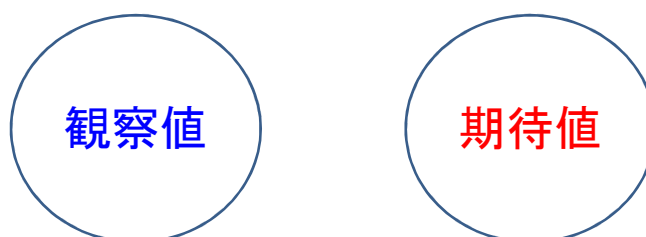
→A群とB群の差の95%信頼区間は、プラス値である。

A群がB群と差があり(小さい)の場合

→A群とB群の差の95%信頼区間は、マイナス値である。

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ



観察値と期待値とに差があるかを検討する。

まず、帰無仮説「観察値と期待値とに差はない」を立てる。

帰無仮説を採択するか、棄却するかを決める。

帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」

帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択し、「差はないとは言えない、すなわち差はある」と結論

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ



観察値と期待値との差(ばらつき)を χ^2 乗値で検討する。

χ^2 乗値が自由度によって決まる限界値よりも小さい場合
帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」

χ^2 乗値が自由度によって決まる限界値よりも大きい場合
帰無仮説が棄却され、「両群に有意な差がある」

バラツキの程度のお考え方

- 平均からのばらつきの数値化として分散を考えた。
 - 標本分散: $\{(\text{実測値}-\text{平均})^2\text{の総数}\} / n$
 - 不偏分散: $\{(\text{実測値}-\text{平均})^2\text{の総数}\} / n-1$
- 期待値からのばらつきの数値化として
 - (観察値-期待値)の2乗を用いる
 - ...

A中学校1年生男子の200名の血液型を調べてみた。

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察値(O)	90	50	10	50	200

日本人の血液型は、A型が40%、B型が20%、AB型が10%、O型が30%であることが知られている

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
期待値(E)	80	40	20	60	200

A中学校1年生男子200名の血液型分布は、日本人の血液型分布と差があるのだろうか？

A中学校1年生男子の200名の血液型を調べてみた。

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察値(O)	90	50	10	50	200
期待値(E)	80	40	20	60	200
観察値-期待値 (O-E)	10	10	-10	-10	0
(観察値-期待値) ² 乗 (O-E) ²	100	100	100	100	400
(観察値-期待値) ² /期待値 (O-E) ² /E	1.25	2.5	5	1.67	10.42

分散の時に(実数-平均)²を計算したことを思い出して、
 (観察値-期待値)²を計算してみる
 (観察値-期待値)²をそれぞれの期待値で除して、
 その総和は、観察値と期待値のずれを示す指標

χ^2 乗値

χ^2 乗値とは、

$\{(\text{観察値} - \text{期待値})^2 \div \text{期待値}\}$ の総和

観察値が期待値に完全に一致すると χ^2 乗値は、0

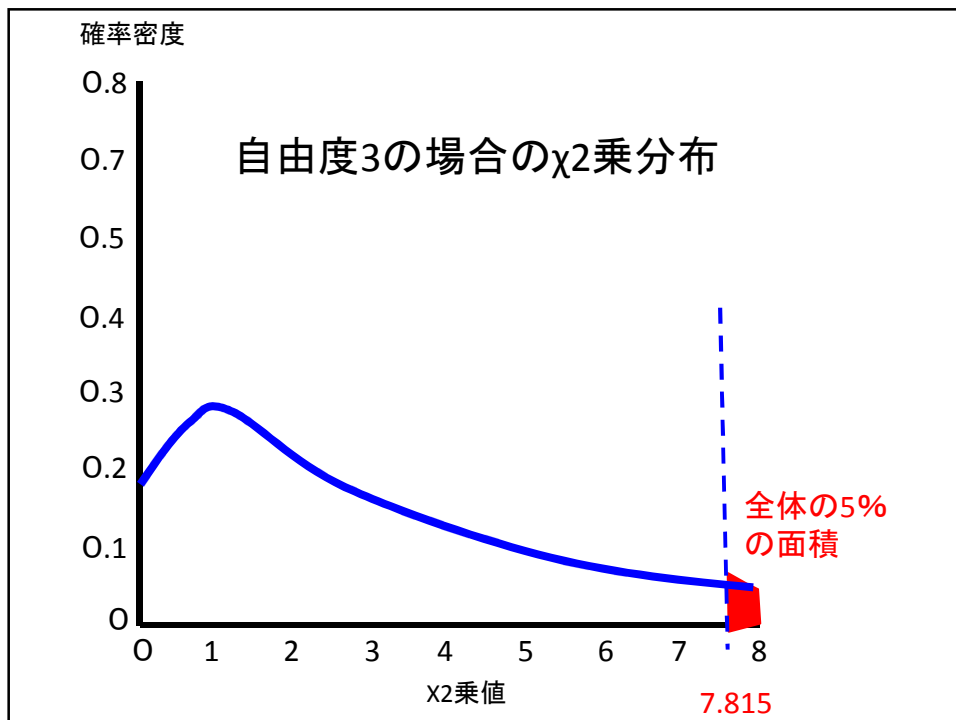
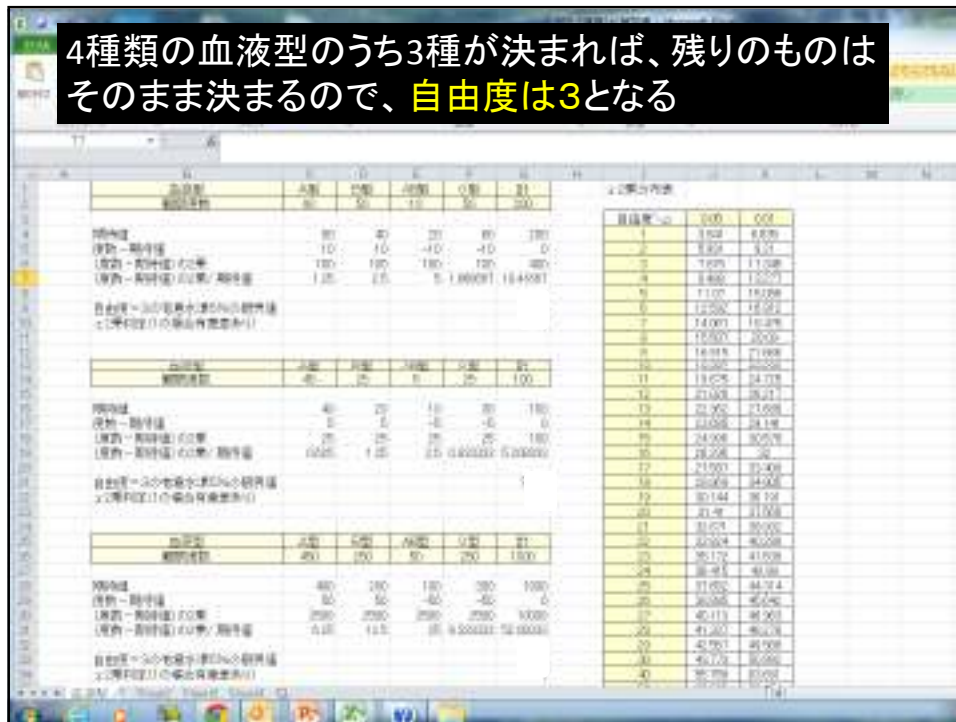
期待値とのずれが大きいと χ^2 乗値は、大きくなる

χ^2 乗値がどれだけ大きければ、有意なずれといえるか？

χ^2 乗分布で検討する

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following tables:

自由度	χ ² 値	累積確率	χ ² 値	累積確率	χ ² 値	累積確率
1	0.004	0.999	0.01	0.995	0.02	0.990
1	0.005	0.997	0.02	0.990	0.05	0.975
1	0.01	0.990	0.05	0.975	0.10	0.950
1	0.02	0.975	0.10	0.950	0.20	0.900
1	0.05	0.900	0.20	0.800	0.50	0.500
1	0.10	0.800	0.50	0.500	1.00	0.200
1	0.20	0.700	1.00	0.200	2.00	0.050
1	0.50	0.500	2.00	0.050	3.00	0.010
1	1.00	0.200	3.00	0.010	4.00	0.005
1	2.00	0.050	4.00	0.005	5.00	0.002
1	3.00	0.010	5.00	0.002	6.00	0.001
1	4.00	0.005	6.00	0.001	7.00	0.0005
1	5.00	0.002	7.00	0.0005	8.00	0.0002
1	6.00	0.001	8.00	0.0002	9.00	0.0001
1	7.00	0.0005	9.00	0.0001	10.00	0.00005
1	8.00	0.0002	10.00	0.00005	11.00	0.00002
1	9.00	0.0001	11.00	0.00002	12.00	0.00001
1	10.00	0.00005	12.00	0.00001	13.00	0.000005
1	11.00	0.00002	13.00	0.000005	14.00	0.000002
1	12.00	0.00001	14.00	0.000002	15.00	0.000001
1	13.00	0.000005	15.00	0.000001	16.00	0.0000005
1	14.00	0.000002	16.00	0.0000005	17.00	0.0000002
1	15.00	0.000001	17.00	0.0000002	18.00	0.0000001
1	16.00	0.0000005	18.00	0.0000001	19.00	0.00000005
1	17.00	0.0000002	19.00	0.00000005	20.00	0.00000002
1	18.00	0.0000001	20.00	0.00000002	21.00	0.00000001
1	19.00	0.00000005	21.00	0.00000001	22.00	0.000000005
1	20.00	0.00000002	22.00	0.000000005	23.00	0.000000002
1	21.00	0.00000001	23.00	0.000000002	24.00	0.000000001
1	22.00	0.000000005	24.00	0.000000001	25.00	0.0000000005
1	23.00	0.000000002	25.00	0.0000000005	26.00	0.0000000002
1	24.00	0.000000001	26.00	0.0000000002	27.00	0.0000000001
1	25.00	0.0000000005	27.00	0.0000000001	28.00	0.00000000005
1	26.00	0.0000000002	28.00	0.00000000005	29.00	0.00000000002
1	27.00	0.0000000001	29.00	0.00000000002	30.00	0.00000000001
1	28.00	0.00000000005	30.00	0.00000000001	31.00	0.000000000005
1	29.00	0.00000000002	31.00	0.000000000005	32.00	0.000000000002
1	30.00	0.00000000001	32.00	0.000000000002	33.00	0.000000000001
1	31.00	0.000000000005	33.00	0.000000000001	34.00	0.0000000000005
1	32.00	0.000000000002	34.00	0.0000000000005	35.00	0.0000000000002
1	33.00	0.000000000001	35.00	0.0000000000002	36.00	0.0000000000001
1	34.00	0.0000000000005	36.00	0.0000000000001	37.00	0.00000000000005
1	35.00	0.0000000000002	37.00	0.00000000000005	38.00	0.00000000000002
1	36.00	0.0000000000001	38.00	0.00000000000002	39.00	0.00000000000001
1	37.00	0.00000000000005	39.00	0.00000000000001	40.00	0.000000000000005
1	38.00	0.00000000000002	40.00	0.000000000000005	41.00	0.000000000000002
1	39.00	0.00000000000001	41.00	0.000000000000002	42.00	0.000000000000001
1	40.00	0.000000000000005	42.00	0.000000000000001	43.00	0.0000000000000005
1	41.00	0.000000000000002	43.00	0.0000000000000005	44.00	0.0000000000000002
1	42.00	0.000000000000001	44.00	0.0000000000000002	45.00	0.0000000000000001
1	43.00	0.0000000000000005	45.00	0.0000000000000001	46.00	0.00000000000000005
1	44.00	0.0000000000000002	46.00	0.00000000000000005	47.00	0.00000000000000002
1	45.00	0.0000000000000001	47.00	0.00000000000000002	48.00	0.00000000000000001
1	46.00	0.00000000000000005	48.00	0.00000000000000001	49.00	0.000000000000000005
1	47.00	0.00000000000000002	49.00	0.000000000000000005	50.00	0.000000000000000002
1	48.00	0.00000000000000001	50.00	0.000000000000000002	51.00	0.000000000000000001
1	49.00	0.000000000000000005	51.00	0.000000000000000001	52.00	0.0000000000000000005
1	50.00	0.000000000000000002	52.00	0.0000000000000000005	53.00	0.0000000000000000002
1	51.00	0.000000000000000001	53.00	0.0000000000000000002	54.00	0.0000000000000000001
1	52.00	0.0000000000000000005	54.00	0.0000000000000000001	55.00	0.00000000000000000005
1	53.00	0.0000000000000000002	55.00	0.00000000000000000005	56.00	0.00000000000000000002
1	54.00	0.0000000000000000001	56.00	0.00000000000000000002	57.00	0.00000000000000000001
1	55.00	0.00000000000000000005	57.00	0.00000000000000000001	58.00	0.000000000000000000005
1	56.00	0.00000000000000000002	58.00	0.000000000000000000005	59.00	0.000000000000000000002
1	57.00	0.00000000000000000001	59.00	0.000000000000000000002	60.00	0.000000000000000000001
1	58.00	0.000000000000000000005	60.00	0.000000000000000000001	61.00	0.0000000000000000000005
1	59.00	0.000000000000000000002	61.00	0.0000000000000000000005	62.00	0.0000000000000000000002
1	60.00	0.000000000000000000001	62.00	0.0000000000000000000002	63.00	0.0000000000000000000001
1	61.00	0.0000000000000000000005	63.00	0.0000000000000000000001	64.00	0.00000000000000000000005
1	62.00	0.0000000000000000000002	64.00	0.00000000000000000000005	65.00	0.00000000000000000000002
1	63.00	0.0000000000000000000001	65.00	0.00000000000000000000002	66.00	0.00000000000000000000001
1	64.00	0.00000000000000000000005	66.00	0.00000000000000000000001	67.00	0.000000000000000000000005
1	65.00	0.00000000000000000000002	67.00	0.000000000000000000000005	68.00	0.000000000000000000000002
1	66.00	0.00000000000000000000001	68.00	0.000000000000000000000002	69.00	0.000000000000000000000001
1	67.00	0.000000000000000000000005	69.00	0.000000000000000000000001	70.00	0.0000000000000000000000005
1	68.00	0.000000000000000000000002	70.00	0.0000000000000000000000005	71.00	0.0000000000000000000000002
1	69.00	0.000000000000000000000001	71.00	0.0000000000000000000000002	72.00	0.0000000000000000000000001
1	70.00	0.0000000000000000000000005	72.00	0.0000000000000000000000001	73.00	0.00000000000000000000000005
1	71.00	0.0000000000000000000000002	73.00	0.00000000000000000000000005	74.00	0.00000000000000000000000002
1	72.00	0.0000000000000000000000001	74.00	0.00000000000000000000000005	75.00	0.00000000000000000000000002
1	73.00	0.00000000000000000000000005	75.00	0.00000000000000000000000005	76.00	0.00000000000000000000000002
1	74.00	0.00000000000000000000000002	76.00	0.00000000000000000000000005	77.00	0.00000000000000000000000001
1	75.00	0.00000000000000000000000001	77.00	0.00000000000000000000000005	78.00	0.00000000000000000000000002
1	76.00	0.000000000000000000000000005	78.00	0.00000000000000000000000005	79.00	0.00000000000000000000000002
1	77.00	0.000000000000000000000000002	79.00	0.00000000000000000000000005	80.00	0.00000000000000000000000001
1	78.00	0.000000000000000000000000001	80.00	0.00000000000000000000000005	81.00	0.00000000000000000000000002
1	79.00	0.0000000000000000000000000005	81.00	0.00000000000000000000000005	82.00	0.00000000000000000000000002
1	80.00	0.0000000000000000000000000002	82.00	0.00000000000000000000000005	83.00	0.00000000000000000000000001
1	81.00	0.0000000000000000000000000001	83.00	0.00000000000000000000000005	84.00	0.00000000000000000000000002
1	82.00	0.00000000000000000000000000005	84.00	0.00000000000000000000000005	85.00	0.00000000000000000000000002
1	83.00	0.00000000000000000000000000002	85.00	0.00000000000000000000000005	86.00	0.00000000000000000000000001
1	84.00	0.00000000000000000000000000001	86.00	0.00000000000000000000000005	87.00	0.00000000000000000000000002
1	85.00	0.000000000000000000000000000005	87.00	0.00000000000000000000000005	88.00	0.00000000000000000000000002
1	86.00	0.000000000000000000000000000002	88.00	0.00000000000000000000000005	89.00	0.00000000000000000000000001
1	87.00	0.000000000000000000000000000001	89.00	0.00000000000000000000000005	90.00	0.00000000000000000000000002
1	88.00	0.0000000000000000000000000000005	90.00	0.00000000000000000000000005	91.00	0.00000000000000000000000002
1	89.00	0.0000000000000000000000000000002	91.00	0.00000000000000000000000005	92.00	0.00000000000000000000000001
1	90.00	0.0000000000000000000000000000001	92.00	0.00000000000000000000000005	93.00	0.00000000000000000000000002
1	91.00	0.00000000000000000000000000000005	93.00	0.00000000000000000000000005	94.00	0.00000000000000000000000002
1	92.00	0.00000000000000000000000000000002	94.00	0.00000000000000000000000005	95.00	0.00000000000000000000000001



4種類の血液型のうち3種が決まれば、残りのものはそのまま決まるので、自由度は3となる

The spreadsheet displays the following data for a chi-square test of independence:

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察度数	90	50	10	50	200
期待値	80	40	20	60	200
度数-期待値	10	10	-10	-10	0
(度数-期待値)の2乗	100	100	100	100	400
(度数-期待値)の2乗/期待値	1.25	2.5	5	1.666667	10.416667

自由度=3の有意水準5%の限界値
χ²乗判定(1の場合有意差あり)
χ²テスト(CHITEST)
自由度(CHINV)

棄却

棄却されず

棄却

エクセルを用いてχ²乗検定を行う方法

The spreadsheet shows the following data for a chi-square test of independence:

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察度数	90	50	10	50	200
期待値	80	40	20	60	200
度数-期待値					
(度数-期待値)の2乗					
(度数-期待値)の2乗/期待値					

自由度=3の有意水準5%の限界値
χ²乗判定(1の場合有意差あり)
χ²テスト(CHITEST)
自由度(CHINV)

血液型	A型	B型	AB型	O型	計
観察度数	45	25	5	25	100
期待値	40	20	10	30	100
度数-期待値					
(度数-期待値)の2乗					
(度数-期待値)の2乗/期待値					

エクセルを用いて χ^2 乗検定を行う方法

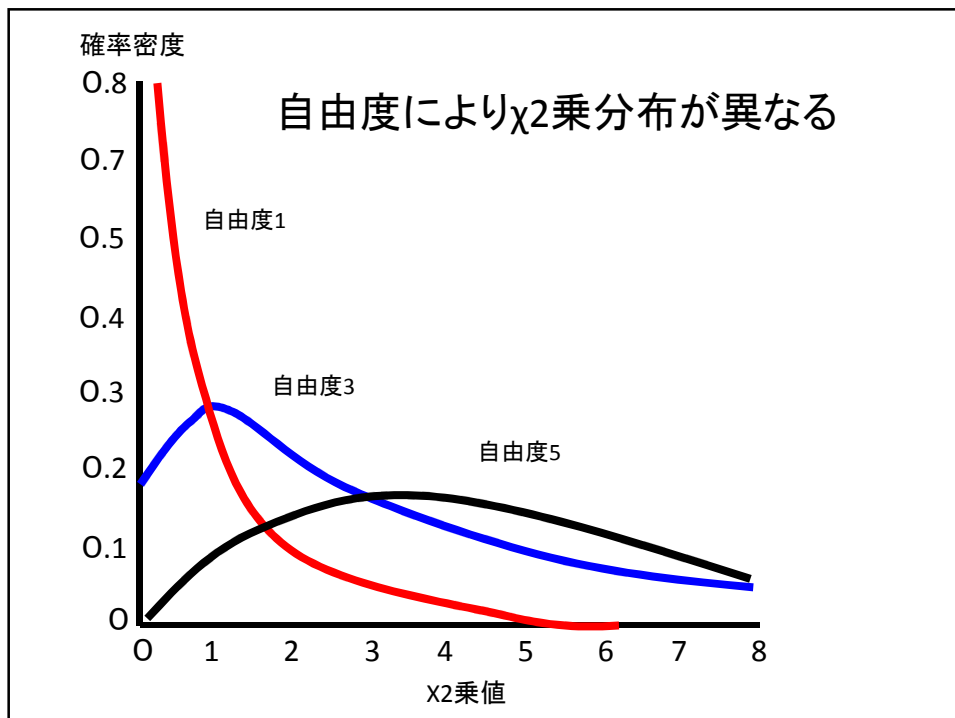
	A	C	D	E	F	G
1	血液型	A型	B型	AB型	O型	計
2	観察度数	90	50	10	50	200
3						
4	期待値	80	40	20	60	200
5	度数-期待値					
6	(度数-期待値)の2乗					
7	(度数-期待値)の2乗/期待値					
8						
9	自由度=3の有意水準5%の限界値					
10	χ^2 乗判定(1の場合有意差あり)					
11	χ^2 テスト(CHITEST)	=chitest(C2:F2)				
12	自由度(CHINV)					
13	血液型	A型	B型	AB型	O型	計
14	観察度数	45	25	5	25	100
15						
16	期待値	40	20	10	30	100
17	度数-期待値					
18	(度数-期待値)の2乗					
	(度数-期待値)の2乗/期待値					

エクセルを用いて χ^2 乗検定を行う方法

	A	B	C	D	E	F	G
1	血液型	A型	B型	AB型	O型	計	
2	観察度数	90	50	10	50	200	
3							
4	期待値		80	40	20	60	200
5	度数-期待値						
6	(度数-期待値)の2乗						
7	(度数-期待値)の2乗/期待値						
8							
9	自由度=3の有意水準5%の限界値						
10	χ^2 乗判定(1の場合有意差あり)						
11	χ^2 テスト(CHITEST)	=chitest(C2:F2,C4:F4)					
12	自由度(CHINV)						
13	血液型	A型	B型	AB型	O型	計	
14	観察度数	45	25	5	25	100	
15							
16	期待値		40	20	10	30	100
17	度数-期待値						
18	(度数-期待値)の2乗						
	(度数-期待値)の2乗/期待値						

エクセルを用いて χ^2 乗検定を行う方法

A	B	C	D	E	F	G
1	血液型	A型	B型	AB型	O型	計
2	観察度数	90	50	10	50	200
3						
4	期待値	80	40	20	60	200
5	度数-期待値					
6	(度数-期待値)の2乗					
7	(度数-期待値)の2乗/期待値					
8						
9	自由度=3の有意水準5%の限界値					
10	χ^2 乗判定(1の場合有意差あり)					
11	χ^2 テスト(CHITEST)	0.015337				
12	自由度(CHINV)					
13	血液型	A型	B型	AB型	O型	計
14	観察度数	45	25	5	25	100
15						
16	期待値	40	20	10	30	100
17	度数-期待値					
18	(度数-期待値)の2乗					
19	(度数-期待値)の2乗/期待値					



今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

A群の
観察値
分布

B群の
観察値
分布

A群の観察値とB群の観察値に差があるかを検討する。
まず、帰無仮説「両群とに差はない」を立てる。
帰無仮説を採択するか、棄却するかを決める。
帰無仮説を採択した場合、「両群に差はない」
帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択し、「差はない
とは言えない、すなわち差はある」と結論

今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

1年男子
の身長
146cm未満
146cm以上

1年女子
の身長
146cm未満
146cm以上

男子と女子の身長に差があるかを検討する。
帰無仮説「男子と女子の身長分布に差はない」
男子と女子の身長分布に差が無いとした時のそれぞれの
期待値を求める。
実測値と期待値の分布のばらつきを χ^2 乗値で調べる。

A中学校1年生の男子と女子の身長を調べてみた。

実測値	146 c m未満	146 c m以上	合計
男子	80	120	200
女子	60	150	210
合計	140	270	410

男子と女子とで身長に差が無いとした場合の分布は？

期待値	146 c m未満	146 c m以上	合計
男子	?	?	200
女子	?	?	210
合計	140	270	410

146cm未満の男子は、200名中 $140/410$ の割合なので
 $200 \times 140/410 = 68.3$

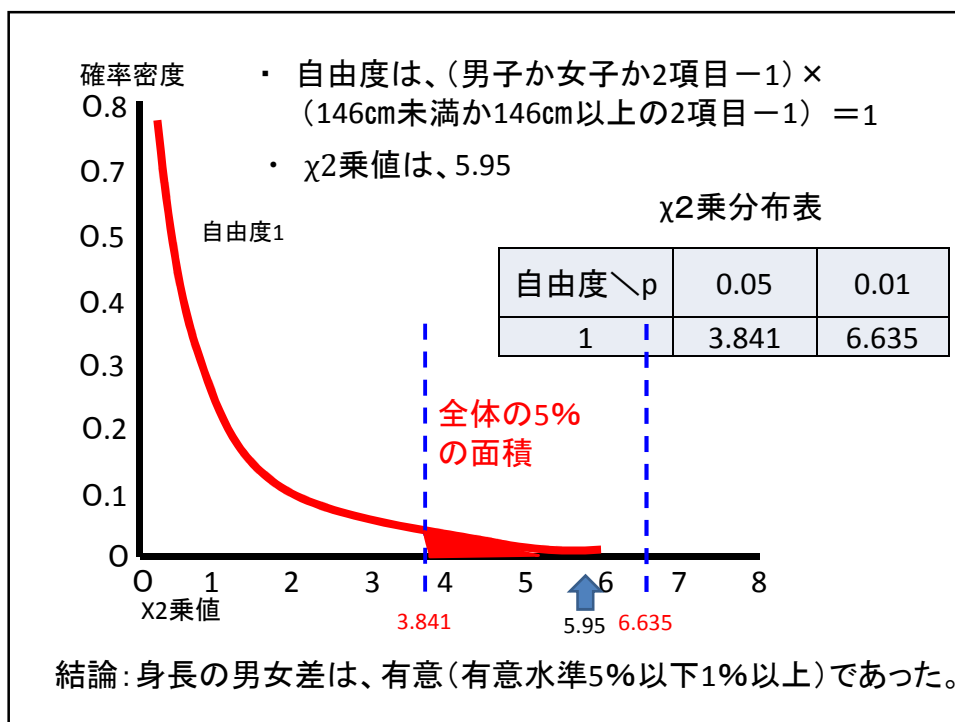
実測値(O)	146 c m未満	146 c m以上	合計
男子	80	120	200
女子	60	150	210
合計	140	270	410

期待値(E)	146 c m未満	146 c m以上	合計
男子	68.3	131.7	200
女子	71.7	138.3	210
合計	140	270	410

$(O-E)^2/E$	146 c m未満	146 c m以上	合計
男子	2.01	1.04	3.05
女子	1.91	0.99	2.90
合計	3.92	2.03	5.95

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A中学校1年生の男子と女子の身長							
2	実測値	145cm未満	146cm以上	合計				
3	男子	80	120	200				
4	女子	80	190	210				
5	合計	140	270	410				
6								
7								
8	期待値	145cm未満	146cm以上	合計				
9	男子			200				
10	女子			210				
11	合計	140	270	410				
12								
13								
14	実測値-期待値	145cm未満	146cm以上	合計				
15	男子							
16	女子							
17	合計							
18								
19								
20	[実測値-期待値] ² の期待値	145cm未満	146cm以上	合計				
21	男子							
22	女子							
23	合計							
24								
25								
26	P値(CHTEST)	#DIV/0!						
27								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A中学校1年生の男子と女子の身長							
2	実測値	145cm未満	146cm以上	合計				
3	男子	80	120	200				
4	女子	80	190	210				
5	合計	140	270	410				
6								
7								
8	期待値	145cm未満	146cm以上	合計				
9	男子	80.2	121.7	200				
10	女子	71.7	138.3	210				
11	合計	140	270	410				
12								
13								
14	実測値-期待値	145cm未満	146cm以上	合計				
15	男子	11.7	-11.7	-1.42109E-14				
16	女子	-11.7	11.7	1.42109E-14				
17	合計	0	0	0				
18								
19								
20	[実測値-期待値] ² の期待値	145cm未満	146cm以上	合計				
21	男子	2.91	1.04	3.95				
22	女子	1.91	0.99	2.90				
23	合計	3.92	2.03	5.95				
24								
25								
26	P値(CHTEST)	0.01471634						
27								



今回のテーマ

2つの群のデータ比較の流れ

1年男子
国語成績

優: 80点以上
良: 79~60点
不可: 59点未満

1年女子
国語成績

優: 80点以上
良: 79~60点
不可: 59点未満

男子と女子の国語成績に差があるかを検討する。

帰無仮説「男子と女子の国語成績分布に差はない」

男子と女子の国語成績分布に差が無いとした時のそれぞれの期待値を求める。

実測値と期待値の分布のばらつきをχ²乗値で調べる。

A中学校1年生の国語成績結果

実測値	優	良	不可	計
男子	50	110	40	200
女子	70	120	20	210
計	120	230	60	410

期待値	優	良	不可	計
男子	58.54	112.20	29.27	200
女子	61.46	117.80	30.73	210
計	120	230	60	410

$(O-E)^2/E$	優	良	不可	計
男子	1.24	0.04	3.93	5.22
女子	1.19	0.04	3.75	4.97
計	2.43	0.08	7.68	10.20

	優	良	不可	計
実測値				
男子	50	110	40	200
女子	70	120	20	210
計	120	230	60	410
期待値				
男子	58.54	112.20	29.27	200
女子	61.46	117.80	30.73	210
計	120	230	60	410
実測値-期待値				
男子				
女子				
計				
$(実測値-期待値)^2/期待値$				
男子				
女子				
計				
P値 (CHIEST)				
#DIV/0!				

	A	B	C	D	E	F
1	A中学校1年生男女別の国語成績結果					
2	実測値	優	良	不可	計	
3	男子	50	110	40	200	
4	女子	70	120	20	210	
5	計	120	230	60	410	
6						
7						
8	期待値	優	良	不可	計	
9	男子	58.54	112.20	29.27	200	
10	女子	61.46	117.80	30.73	210	
11	計	120	230	60	410	
12						
13						
14	実測値-期待値	優	良	不可	計	
15	男子	58.54	112.20	29.27	200	
16	女子	61.46	117.80	30.73	210	
17	計	120	230	60	410	
18						
19						
20	(実測値-期待値) ² /期待値	優	良	不可	計	
21	男子	1.26	0.04	3.93	5.23	
22	女子	1.19	0.04	3.75	4.97	
23	計	2.43	0.08	7.68	10.20	
24						
25						
26	P値(CHTEST)	0.004196043				
27						

- χ^2 乗値は、10.20
- 自由度は、(男女:2-1) × ((優・良・不可:3-1) = 2

χ^2 乗分布表

自由度 \ p	0.05	0.01
1	3.841	6.635
2	5.991	9.21
3	7.815	11.345
4	9.488	13.277
5	11.07	15.086
6	12.592	16.812

結論: 国語成績の男女差は、有意(有意水準1%以下)であった。